XVI. Integration der Differentialgleichungen von einer Form. Von Joseph Petzval, k.k. Professor.

Mitgetheilt in der Sitzung vom 26. März 1847 von Herrn Ritter v. Ettingshausen in Wien.

Bekanntlich ist die Integration der Differentialgleichungen ein Theil der mathematischen Analysis, der von jeher von den grössten Analysten mit Vorliebe gepflegt wurde, und in welchem sich auch die glänzendsten Resultate haben erzeugen lassen. Gleichwohl ist dieser Gegenstand noch gar nicht erschöpft, sondern bietet immer noch viele Schwierigkeiten für künftige mathematische Combinationen. Ja, wir besitzen auf diesem Felde noch gar nicht genug Eigenthum um diesen laufenden geometrischen oder mechanischen Bedürfnissen zu stehen, und gelangen ganz gewöhnlich bei der Lösung der meisten Aufgaben der angewandten Mathematik endlich zu einer Differenzialgleichung, die unseren Combinationen, da wir sie nicht integriren können, sich wie ein unübersteiglicher Damm entgegenstellt. Die am häufigsten vorkommende und daher auch wichtigste Form der Differentialgleichungen ist die sogenannte lineare. Darunter alle Gleichungen des mathematischen Naturforschers führen endlich darauf hinaus, was seinen Gegenstand lediglich darin hat, dass dieser entweder die Gesetze der Bewegungen von sehr kleinen Amplituden zu erforschen, oder zu bereits in erster Annäherung bekannten Elementen sehr kleine Correctionen zu suchen hat, und dabei jedesmal die Glieder der höheren Ordnungen vernachlässigend, nothwendig zur linearen Form gelangen muss. Hinwieder ist die Fähigkeit der Geometer in Aufsuchung der besonderen Auflösungsarten der Gleichungen so weit gediehen, dass wir besitzen wir doch nun allgemeine Integrationsmethoden für ~~alle~~ Differentialgleichungen mit constanten Coeffi-

einander, oder solche die sich durch einfache Substitutionen auf dieselben zurückführen lassen, von Gleichungen aber mit verschiedenen Coefficienten nur einige besonderen Falls
specialen, so daß durch einen bestimmten Kunstgriff integrirbaren Formen.

Daß es mir, freilich zweifelhaften Wunsch gewesen wäre, über die linearen differentialgleichungen einen ähnlichen Anblick zu besitzen wie wir ihn über die algebraischen Gleichungen, die mit den früheren in vielfacher Verwandtschaft stehen, besitzen, wird man mir gewiß glauben, daß ich aber nach langen nicht im Besitze einer solchen bin, sind auch bei der verhältnißmäßig bedeutend größeren Schwierigkeit des Gegenstandes, und da zu geringen Vorarbeiten vorhanden sind, kaum wird man aber so gut wissen. Ich begnüge mich also zu einer solchen Arbeit, bei der dem Forscher die Theorie der algebraischen Gleichungen als Muster vorschweben soll, und da ich auf die thätigen Resultaten meiner jüngsten Studien gestützt zu haben glaube, einen kleinen Beitrag zu liefern, und gute Hoffnung, was ich etwa habe, und wozu mich meine nächsten Studien der Lehrfächer der höheren Analysis, mit denen ich seit mehreren Jahren beschäftigt bin, wenn auch nicht ausführlich, wenigstens vorzugsweise zugewendete Richtung der Forschung gestützt hat, einen Richtung, die ich auf künftigen beizubehalten gesonnen bin, da ich mir schon manchen Punkt, im Verlaufe meiner bisherigen Lehrer aus der jüngsten Zeit, die sich mir in diesem Fach aufstellen, vollständig zu entwickeln. Es wird mir daher mir sehr einige Freude machen, wenn irgend einer meiner Herren, denen vorzugsweise diese Arbeit gewidmet ist, es in meiner Hörsaalen treffen, übernehmen, der Gebiet der linearen differentialgleichung nach allen Richtungen genügend zu durchforschen.

Den hier bezeichneten Gegenstand fing schon vor fünfzehn Jahren an meiner Aufmerksamkeit zu erregen, und ich gelangte damals schon zu der Integrationsmethode für lineare Gleichungen mit constanten, die nach der einfachsten Variablen vom ersten Grade sind. Ich bin bis auf die Zeit zu wiederholten Malen zu demselben Gegenstande zurückgekehrt, und fand stets Gelegenheit zu neuen Gesichtspunkten und einiges etwas hinzuzufügen. Ich habe in der Undulationstheorie von dieser mir eine Integrationsmethode einen nützlichen Gebrauch gemacht und bin überzeugt, daß sie dieselbe zu allen Zeiten der mathematischen Physik von Nutzen sein wird. Die schon mir früher bekannten einfachen Ausnahmen einer Vorzug zu besitzen, so gilt nämlich mit differenzialgleichungen, die man bisher durch die Integrale von allen linearen integrirbaren gelöst hat, und sind zwar durch die mannigfaltigsten Künstgriffe gefunden, und es wird durch eine einfache Darstellung, die jene Gleichungen zu einer gleich bleibenden Form zurückführt, im gegenwärtigen Aufsatze gezeigt, wie diejenigen Gleichungen, Poisson in seiner Theorie Coraucez in der Theorie der Massenvolum, der Männer, gelangt, sowie die unter dem Namen der Riccatischen bekannte und mehrere andere auf manchfachen Wegen integrirt, einfacher und leichter mittelst der hier gegebenen behandelt werden können. So habe ich mich denn bemüht, die Analysis in ihre Abhandlungen wiederzugeben, und der Öffentlichkeit zu übergeben, von denen die nächste damit eine mathematisch-wissenschaftlichen Publikum übernommen wird.

* wodurch die Mittelgattung der Riccatischen Gleichungen auf eine andere zurückgeführt wird.

~~Lösung und genaue Diskussion der Gleichung~~

~~Integrale Integration der differentiellen~~

~~Gleichung von einer gewissen~~

~~Art homogener linearer~~

~~Gleichungen~~

§1.

Integration der Gleichungen von der Form

$$\frac{d^n y}{dx^n}(a_n + b_n x) + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}(a_{n-1} + b_{n-1} x) + \ldots + \frac{dy}{dx}(a_1 + b_1 x) + y(a_0 + b_0 x) = 0 \qquad (a)$$

wo $a_0 \ldots a_n$, $b \ldots b_n$ Coefficienten bedeuten ~~die~~ willkürlichen Werth.

Für die Integralen der linearen differentialgleichungen, die man bisher auszufinden gelehrt hat, gelangt man in der Regel auf eine gewisse Voraussetzung hinsichtlich der Form des Ausdrucks, der die Eigenschaft hat Genüge zu leisten, d. h. erst muss die Form ermittelt werden, ~~welche gewisse Integrale~~ muss nämlich, damit gewisse algebraische Ausdrücke, die ~~Integrale~~ besitzen, der Gleichung Genüge leisten, so mit als etwa gewisse particulären Integralen zu betrachten sind, und die man dann so mit einer willkürlichen Constante multiplicirt und addirt und so abermals einen Ausdruck erhält, der die vorgelegte linearen differentialgleichung erfüllt, und ein vollständiges Integrale ist oder nicht, je nachdem in demselben die erforderliche Zahl von willkürlichen Constanten vorhanden ist, oder nicht. So integriren wir die Gleichung:

$$A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + A_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots + A_n \frac{d^n y}{dx^n} = 0 \qquad (1.)$$

indem wir den Werth von y von der Form e^{rx} voraussetzen. Und wirklich gibt e^{rx} statt y

substituirt ~~polynom Gleichung~~ polynom Gleichung

$$A_0 e^{rx} + A_1 r e^{rx} + A_2 r^2 e^{rx} + \dots + A_n r^n e^{rx} = 0$$

oder $A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots + A_n r^n = 0$. (3)

so wird dieser e^{rx} ein particuläres Integral wenn r einer beliebigen der n Wurzeln der Gleichung (3) ist.

Nehmen wir diese n Wurzeln mit

$$r_1 \; r_2 \; r_3 \; \dots \; r_n$$

so sind

$$e^{r_1 x} \; e^{r_2 x} \; e^{r_3 x} \; \dots \; e^{r_n x}$$

particuläre Integrale, und in folge der linearen Form der Differenzialgleichung:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \dots + C_n e^{r_n x} \quad (4)$$

~~das~~ das allgemeinste mit n willkührlichen Constanten $C_1 \dots C_n$ versehene particuläre Integral derselben.

Die nächste Absicht gehet nun zum Integral der Gleichung:

$$A_n (h+kx)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1} (h+kx)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_1 (h+kx) \frac{dy}{dx} + A_0 y = 0 \quad (5)$$

$y = (h+kx)^r$ vorausgesetzt.

Dieß führt nämlich für polynomische Gleichung des n^{ten} Grades in r

$$A_n k^n r(r-1) \dots (r-n+1) + A_{n-1} k^{n-1} r(r-1) \cdot (r-n+2) + \dots + A_1 k r + A_0 = 0 \quad (6)$$

Seien n Wurzeln wie mit $r_1 \dots r_n$ bezeichnet und n denselben Werthe für das allgemeinste particuläre polynomische mit n willkührlichen Constanten

$$C_1 \dots C_n$$

versehene Ausdruck resultirt:

$$y = C_1 (h+kx)^{r_1} + C_2 (h+kx)^{r_2} + \dots + C_n (h+kx)^{r_n} \quad (7)$$

Die Ausdrücke (4) & (7) seien nun n willkührliche Constante in sich zu schließen, welchem somit das Character eines allgemeinen Integrales, wenn ~~die~~ unter den Wurzeln der Gleichungen (3) und (6) gleiche vorkommen. Es haben diese nicht alle particulären Integrale der Differenzialgleichung die ihnen gegebene Form und es fragt sich, wenn:

$$r_1 = r_2 = \dots = r_m$$

in (3) sein sollte, ob statt des Ausdruckes (4) polynomischer andere als allgemeinste Integral sei:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_{m+1} x^{m-1}) e^{r_1 x} + C_{m+1} e^{r_{m+1} x} + \dots + C_n e^{r_n x} \quad (8)$$

Genau wie dieselbe Absicht leitet uns die Vermuthung, daß die Differenzialgleichung (a) die der Gegenstand unserer Untersuchung sein soll particuläres Integral zulasse von polynomischer Form:

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{ux} V \frac{dU}{du} du \quad (9)$$

~~wo~~ U und V Functionen der Veränderlichen u, u' und u'' aber gewisse gewählte Integrationsbegrenzungen andeuten. Um nun die Werthe von U, V, u', u'', die eben der Ausdruck (9) wo möglich in ein particuläres Integral umwandeln, zu bestimmen substituiren wir denselben in die Differenzialgleichung [a], und resultirt, wenn wir bedenken, daß

$$\frac{dy}{dx} = \int_{u'}^{u''} U e^{Ux} V \frac{dU}{du} du, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \int_{u'}^{u''} U^2 e^{Ux} V \frac{dU}{du} du \ldots\ldots$$

(10) $$\frac{d^n y}{dx^n} = \int_{u'}^{u''} U^n e^{Ux} V \frac{dU}{du} du$$ ist,

und überdies

(11) $$U_0 = a_n U^n + a_{n-1} U^{n-1} + \cdots + a_1 U + a_0$$

(12) $$U_1 = b_n U^n + b_{n-1} U^{n-1} + \cdots + b_1 U + b_0$$

gesetzt

(13) $$\int_{u'}^{u''} [U_0 + U_1 x] e^{Ux} V \frac{dU}{du} du = 0$$

gesetzt, endlich U V u' u'' so zu bestimmen, daß die Gleichung (13) eine identische wird.

Nun läßt sich jedes Integral so schreiben:

(14) $$\int_{u'}^{u''} U_0 e^{Ux} V \frac{dU}{du} du + x \int_{u'}^{u''} U_1 e^{Ux} V \frac{dU}{du} du = 0$$

und man erfüllt so die Bedingung der Gleichung, zum Integrationsfaktor

(15) $$x \int U_1 e^{Ux} V \frac{dU}{du} du = e^{Ux} U_1 V - \int e^{Ux} \frac{d(U_1 V)}{du} du$$

gesetzt, wenn nun das Symbol

$$\left\{ e^{Ux} U_1 V \right\}_{u'}^{u''}$$

Bedeutung besitzt, und man erfüllt, wenn man in den eingeklammerten Ausdruck für die Integration, statt u zuerst u'' dann die Größe u' substituirt, und die Resultate der zweiten Substitution von jenem

der ersten abzieht ~~die Gleichung~~

$$x \int_{u'}^{u''} U_1 e^{Ux} V \frac{dU}{du} du = \left\{ e^{Ux} U_1 V \right\}_{u'}^{u''} - \int_{u'}^{u''} e^{Ux} d[U_1 V] \qquad (16)$$

Zu folge dieser Gleichung geht nun die [14] über in

$$\left\{ e^{Ux} U_1 V \right\}_{u'}^{u''} + \int_{u'}^{u''} e^{Ux} \left[U_0 V \frac{dU}{du} du - \frac{d[U_1 V]}{du} du \right] = 0 \qquad (17)$$

und dieser letztere ist nun identisch, das heißt für jeden Werth von x sind gewisse Functionen von u anstatt U und V und gewisse Werthe der Größen u' und u'' genügen zu bestimmen. Dieß wird offenbar erreicht, wenn man

$$U_0 V dU - d(U_1 V) = 0 \qquad (18)$$

setzt und überdies für u' und u'' solche Werthe x nach U in sich aufhaltende Werthe substituirt, die der Gleichung

$$\left\{ e^{Ux} U_1 V \right\}_{u'}^{u''} = 0 \qquad (19)$$

genügen leisten. Es ist aber [18] eine Differenzialgleichung, deren erster Ordnung von linearer Form, und gibt als ihr bestimmtes Integral folgenden Werth für V in Function von U

$$V = \frac{C}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} dU} \qquad (20)$$

Substituirt in (19) substituirt diese Gleichung verwandelt in

$$\left\{ C e^{Ux + \int \frac{U_0}{U_1} dU} \right\}_{u'}^{u''} = 0 \qquad (21)$$

Man wird jetzt somit imstande für U eine beliebige Function von U die und die bezeichnete Anforderung vorgeschrieben zu substituiren, das einfachste wäre anstatt U U zu setzen, dann setzt man diejenigen Werthe von U ermittelt, welche der in (21) eingeklammerten Function einerlei Werth A verleihen. Gesetzt man stelle diese

nehmen $u_1\ u_2\ u_3 \ldots\ u_p$ gefunden, so kann man

$$u' = u_1\ ,\ u'' = u_2$$

oder

$$u' = u_1\ ,\ u'' = u_3$$

oder

$$u' = u_1\ ,\ u'' = u_4$$

u.s.w. substituiren, und wird so particulärer Integrale $p-1$ an der Zahl resultiren, welche in der Form unter sich und von 0 verschieden und so gefunden werden, ~~sind~~ nämlich:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} C_1 e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \frac{du}{u_1} \quad \text{(22)}$$

$$y = \int_{u_1}^{u_3} C_2 e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \frac{du}{u_1}$$

$$y = \int_{u_1}^{u_4} C_3 e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \frac{du}{u_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = \int_{u_1}^{u_p} C_{p-1} e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \frac{du}{u_1}$$

Und weil die Differenzialgleichung linear ist so wird sie auch die Summe dieser particulären Werthe genügen. Wir setzen somit:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} C_1 e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \frac{du}{u_1} + \int_{u_1}^{u_3} C_2 e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \frac{du}{u_1} + \ldots \quad \text{(23)}$$

$$+ \int_{u_1}^{u_p} C_{p-1} e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \frac{du}{u_1}$$

Man kann sich nun a posteriori davon überzeugen, dass diese Ausdrücke stets y ergeben, die vorgelegte Differenzialgleichung erfüllen, so dass sie in der That ein Integral derselben sind, welches aus $p-1$ particulären Integralen besteht und durch die ungeänderte Anwendung der Substitution gefunden ist. Somit ist das Integral:

$$\left\{ C_1 e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \right\}_{u_1}^{u_2} + \left\{ C_2 e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \right\}_{u_1}^{u_3} + \ldots + \left\{ C_{p-1} e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \right\}_{u_1}^{u_p} \quad \text{(24)}$$

wenn einzelne Glieder in Folge der für $u_1\ u_2 \ldots u_p$ und der Auflösung der Gleichung (21) hervorgehenden Werthe jedes für sich den Nullwerth ergeben werden. Es geht hieraus hervor, dass es nicht nothwendig ist, jene Werthe der Integrationsconstanten zu wissen wie im Vorhergehenden übereinander gesetzt worden ist, es genügt vielmehr, wenn blos die Summe (24) verschwindet, und z.B. dann der Fall ist, wenn die Form verschwindet

$$\left\{ e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \right\}_{u_1}^{u_2} + \left\{ e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \right\}_{u_1}^{u_3} \ldots + \left\{ e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} \right\}_{u_1}^{u_p}$$

Weil nämlich nun diejenigen von 0 verschiedenen Werthe B angenommen und überdiess zwischen den Constanten ~~C_p C_p~~ $C_1 \ldots C_{p-1}$ solche Relationen festgesetzt wird:

$$C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_{p-1} = 0$$

oder wenn dieselben Substitutionen wie die von einander verschiedenen constanten Grössen

$$B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_{p-1}$$

verstanden, wodurch zugleich

$$C_1 B_1 + C_2 B_2 + \ldots\ldots + C_{p-1} B_{p-1} = 0$$

erfüllt wird.

ob und wie diese Klasse gelungen wie Integral der zur Differentialgleichung mit x von verschiedenen willkürlichen Constanten, oder wie mit Constanten a+k an der Stelle und k zwischen denselben stetig findenden Differentialgleichungen aufzufinden ist das Integral eine allgemeine, jene aber nur ein particuläres durch die Zusatz einer neuen Constanten von x, die sie die Integrale haben müssen. Sie müssen zu beiden und die neu hinzukommende Constante enthalten müssen, zu [illegible] vervollständigen. Wir wollen in diesem Paragraphen blos zeigen, wie man sich aus dem Gange bestimmen Integrale particuläre Integrale verschaffen kann, die Untersuchung aber, ob der und diesen gefundenen Werthen zugehörige Integral ein allgemeines Integral sei und vervollständigen, diesen, wenn nur solchen bedürfen sollte für den nächsten Paragraph aufgespart.

Hat man nun das bisher gesagte zusammen, so wird sich folgende Integrationsmethode für gleichungen, deren Coefficienten von der Form $a+bx$ sind: Man bildet zuerst die mit U_0 & U_1 bezeichneten Polynome, dadurch, dass man in der Differentialgleichung anstatt der vorkommenden Differentialquotienten einsetzt die vorkommenden Potenzen von y:

$$\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \ldots\ldots \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y$$

bezüglich die Potenzen

$$U^n, U^{n-1}, \ldots\ldots U^2, U, 1$$

substituirt, und in den so gefundenen Polynomen die Coefficienten aller Glieder ohne x mit U_0 den Coefficienten von x mit U_1 bezeichnet, sodann vorausgesetzt man sei das Integral

$$\int \frac{U_0}{U_1} dU$$

wobei man offenbar nur mit denjenigen Werthen zu thun hat, denen U_1 verschwindet; dann wird man für U eine beliebige Function von u, die für ungewöhnliche Untersuchungen am besten ungeschickten scheint substituiren, und die Integrale der Gleichung

$$e^{U + \int \frac{U_0}{U_1} dU} = C,$$

wobei C eine beliebige [illegible] von der Null verschiedene Grösse oder auch die Null verstanden, aufsuchen. Sind nun diese $U, U_2 \ldots U_p$ so hat man das Integral der Differentialgleichung bereits gefunden, als es nämlich sich in der Form (23) [illegible] zusammensetzen. Es wird jetzt um Gewissheit zu gegen ob diese Methode jedes Integral gebe, oder ob es nicht Fälle gebe, wo sie nicht ausreicht, und wo man allgemeine Integrale auf andere Art finden müsse. Es ist nämlich sich in der Form (23) [illegible] zusammensetzen. Es wird jetzt um Gewissheit zu gegen ob diese Methode jedes Integral gebe, oder ob es nicht Fälle gebe, wo sie nicht ausreicht, und wo man allgemeine Integrale auf andere Art finden müsse. Es ist nämlich sich in der Form (23)

$$U + \int \frac{U_0}{U_1} dU = 0 \quad (25)$$

zu setzen.

weist muss. Verallgemeinerung bedarf, eine für allgemeinen Integral erhalten zu werden. Nehmen wir als nächsten Beispiel die allgemeine Gleichung der zweiten Ordnung:

(26) $$\frac{d^2y}{dx^2}(a_2+b_2x)+\frac{dy}{dx}(a_1+b_1x)+y(a_0+b_0x)=0$$

Nehmen wir für jetzt an, dass $b_2=0$ ist und dass die beiden Coefficienten a_2 und b_2 von Null verschieden sind. Im letzten Falle bekommen wir durch Division mit b_2 gleich eine einfachere Form, übrigens lässt sich auch die Gleichung durch a_2 dividiren und erhält folgende Gestalt

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}(a_1+b_1x)+y(a_0+b_0x)=0$$

welche jetzt durch Einführung einer neuen Variablen mittelst der Substitution $x=x'-\frac{a_1}{b_1}$ noch die noch einfachere Form

(27) $$\frac{d^2y}{dx^2}+b_1x\frac{dy}{dx}+y(a_0+b_0x)=0$$

annimmt. Die Bedingung $b_1\neq 0$, dass b_1 von Null verschieden sein soll, ist wesentlich, während a_1 Null sein darf. Ist aber b_2 nicht Null, so wird man $x-\frac{a_2}{b_2}$ anstatt x setzen, die (26) in die einfachere

(28) $$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}(a_1+b_1x)+y(a_0+b_0x)=0$$

verwandeln, wo dann a_2 nicht mehr eine Null sein darf. Wir wollen die (28) zuerst voraussetzen, und dann in derselben

$$\eta_0 = a_1\eta + a_0$$
$$\eta_1 = \eta^2 + b_1\eta + b_0$$

$$\int\frac{\eta_0}{\eta_1}d\eta = \int\frac{a_1\eta+a_0}{\eta^2+b_1\eta+b_0}d\eta \qquad (29)$$

Nennen wir, um zu dem Zweck der letzten Integration zu gelangen, α und β die Wurzeln der Gleichung

$$\eta^2+b_1\eta+b_0=0$$

so wird sich der Bruch unter dem Integralzeichen in zwei Partialbrüche zerlegen lassen, von der Form

$$\frac{A}{\eta-\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{A'}{\eta-\beta}$$

und es wird

$$\int\frac{\eta_0}{\eta_1}d\eta = A\log(\eta-\alpha)+A'\log(\eta-\beta)=\log\left[(\eta-\alpha)^A(\eta-\beta)^{A'}\right] \qquad (30)$$

und die Auflösung der Gleichung (21) erhält folgende Gestalt:

$$(\eta-\alpha)^A(\eta-\beta)^{A'}e^{\eta x}=0 \qquad (31)$$

Hier können offenbar die Exponenten A und A' reell und positiv oder zwei imaginäre sein, so dass auch diese reellen Theile positiv ausfallen. Setzen wir $\eta=\xi+i\eta$, und x reell positiv, so wird offenbar der Gleichung (31) genügt durch die Werthe

$$\xi=\alpha \quad \eta=\beta \quad \eta=-\infty \qquad (32)$$

ist aber der Werth von x negativ, dann folgende andere:

$$\eta=\alpha \quad \eta=\beta \quad \eta=+\infty \qquad (33)$$

Es ist keiner Zweifel unterworfen, in falle α und α' reel und positiv ganz gedacht, wenn gerade α und β zwischen denjenigen imaginären Größen sind die sich aus $\sqrt{-1}$ zusammensetzen, welche unter denen sind, für welche α und α' absolute zwischen ganzen imaginären Zahlen

(34) $$\alpha = c + 2\sqrt{-1} \qquad \alpha' = c - 2\sqrt{-1}$$

und es könnte ein Zweifel erhoben werden, ob

$$(\mathfrak{N}-\gamma)^{c+2\sqrt{-1}}$$

für $\mathfrak{N}=\alpha$ wirklich gleich Null ganz. Wenn aber zweifel nicht hierüber mehr bleibt, wenn c positiv ist, und wieder ein wiederum ganzer derselbe negativ wird fällt, wenn man bedenkt, dass

$$1^{\infty} \, 0^{c} = 0 \qquad 0^{2\sqrt{-1}} = (e^{-\infty})^{2\sqrt{-1}} = e^{-\infty 2\sqrt{-1}}$$

$$= \cos(\infty 2) - \sqrt{-1}\sin(\infty 2).$$

Gleich einer endlichen Größe ein negativ und grösser oder wenigstens wird, wie $\cos(\infty 2)$ die Einheit nicht je übersteigen kann. Ein solcher Fall gleich muss nun auch vorhanden sein, wenn nämlich das Integral der vorgelegten Differenzengleichung in endlicher ganz, wenn für den Exponenten n bei ganzen reell positiv ist, und wieder ein wiederum ganzer derselbe negativ wird fällt, wenn auch schon wie für positive n

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{\mathfrak{N}x} \frac{(\mathfrak{N}-\alpha)^{n}(\mathfrak{N}-\beta)^{n'}}{\mathfrak{N}^2 + b_1\mathfrak{N} + b_0} d\mathfrak{N} + C_2 \int_{\alpha}^{-\infty} e^{\mathfrak{N}x} \frac{(\mathfrak{N}-\alpha)^{n}(\mathfrak{N}-\beta)^{n'}}{\mathfrak{N}^2 + b_1\mathfrak{N} + b_0} d\mathfrak{N}$$

oder der

$$\mathfrak{N}^2 + b_1\mathfrak{N} + b_0 = (\mathfrak{N}-\alpha)(\mathfrak{N}-\beta)$$

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{\mathfrak{N}x} (\mathfrak{N}-\alpha)^{n-1}(\mathfrak{N}-\beta)^{n'-1} d\mathfrak{N} + C_2 \int_{\alpha}^{-\infty} e^{\mathfrak{N}x} (\mathfrak{N}-\alpha)^{n-1}(\mathfrak{N}-\beta)^{n'-1} d\mathfrak{N} \qquad (35)$$

für negative Werthe von x aber

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{\mathfrak{N}x} (\mathfrak{N}-\alpha)^{n-1}(\mathfrak{N}-\beta)^{n'-1} d\mathfrak{N} + C_2 \int_{\beta}^{+\infty} e^{\mathfrak{N}x} (\mathfrak{N}-\alpha)^{n-1}(\mathfrak{N}-\beta)^{n'-1} d\mathfrak{N} \qquad (36)$$

Es ist wichtig hier noch die Bemerkung hinzuzufügen dass, in falle α und β imaginär waren, aber $\alpha = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ und somit $\beta = \lambda - \mu\sqrt{-1}$, wenn auch die Integrationsgrenze ∞ in den Formeln (35) und (36) mögliche könnte in $\pm \infty(\lambda \pm \mu\sqrt{-1})$, nur wenn dann die Zeichen $\pm$ so wählen, dass der reelle Theil der imaginären Grenze in der Gleichung (35) negativ in der Gleichung (36) aber positiv wird fällt; ferner wird man in diesem falle, wie in den letzten Formeln angedeutet auch dividiren, dass die Function der Umwandlung der Grenze und der endlichen Transformation in eben solcher und imaginäre in Form Theile zu getheilten Werthe trennen, in der Art einfachen, die $\sqrt{-1}$ in die Function selbst hinein zu verlegen.

Nehmen wir jetzt einen gewissen möglichen fall an, dann nehmlich n einen der Exponenten α und α' positiv, den andern negativ ist und gehen wir, um diese Verschiedenheit derselben auf Acht fallen zu lassen, $-\alpha'$ mehrfach α' so werden wir zu nächst der Gleichung (35) folgende andere

$$\frac{(\mathfrak{N}-\alpha)^{n}}{(\mathfrak{N}-\beta)^{n'}} e^{\mathfrak{N}x} = 0 \qquad (37)$$

denen Kurzahl für positive α sind:

(38) $$\Pi = \alpha \qquad \Pi = -\infty \qquad \Pi = \pm\infty\sqrt{-1}$$

die letzten beiden Werthe von Π liefern wie (37) einen gemeinsamen dritten aber nur dann, wenn $k' > k$ ist. Übrigens sind für k und k', so wie α und β, immer stets, der Natur der Sache nach, weil, wenn sie einzig in der Größe verschieden, die minder oft genommen werden müssten, und weil dabei im Falle von $\sqrt{-1}$ unterschieden könnten, wenn also nicht stets von einem positiv und einem negativen k gesprochen werden könnte, also k für $\sqrt{-1}$ und k für gewöhnliches $-\sqrt{-1}$ genommen, in welchen letzteren der dritte der in (38) angeführten Werthe von Π jedesmal ausgeschlossen hat; ferner ist für negatives α [illegible] $k' > k$ ist. für negatives α bekommt die Gleichung (37) die Kurzen

$$\Pi = \alpha, \quad \Pi = +\infty, \quad \Pi = \pm\infty\sqrt{-1}$$

die letzten derselben aber nur in der Voraussetzung wo $k' > k$ ist. das Integral der vorgelegten Differenzialgleichung erhält nun aber nur in zwei verschiedenen wo positiven und negativen Beschaffenheit des Variablen x entsprechenden Formen, nämlich

(39) $$y = C_1 \int_{\alpha}^{-\infty} e^{\Pi x} \frac{(\Pi-\alpha)^{k-1} d\Pi}{(\Pi-\beta)^{k'+1}} + C_2 \int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\Pi x} \frac{(\Pi-\alpha)^{k-1} d\Pi}{(\Pi-\beta)^{k'+1}}$$

(40) $$y = C_1 \int_{\alpha}^{+\infty} e^{\Pi x} \frac{(\Pi-\alpha)^{k-1} d\Pi}{(\Pi-\beta)^{k'+1}} + C_2 \int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\Pi x} \frac{(\Pi-\alpha)^{k-1} d\Pi}{(\Pi-\beta)^{k'+1}}$$

die erste dieser Formeln gilt für positive, die zweite für negative Werthe von x; so bleibt noch der zweite mit der Constante C_2 verbundene Theil vorzulassen, wobei wieder $k = k'$ oder $k > k'$ ist, der jedenfalls übrig bleibende, nur mit einer einzigen Constante C_1 verbundene Werth von y, für den Specialfall eines allgemeinen Integrales zweiter Ordnung dass die Function eine algebraische sein kann, welche eine zweite Constante in sich schließt zu entwickeln. Die vorzunehmende Arbeit in Betreff des Werthes $k = k'$ bleibt wie schon gesagt einer nächsten Vorlesung vorbehalten.

Betrachten wir jetzt den dritten Fall wo k und k' negative oder wenigstens positive sind, wenn auch Theile negative Werthe haben. Verwandeln wir, um dies der Augenschein zu machen k und k' in $-k$ und $-k'$ so wird die Gleichung (37) jetzt in

$$\frac{e^{\Pi x}}{(\Pi-\alpha)^{k}(\Pi-\beta)^{k'}} = 0 \qquad (41)$$

übergehen und erfüllt wird dieß wenn man setzt, für Π gesetzten Werth, von der Form:

$$\Pi = \infty(M + N\sqrt{-1})$$

unter M eine beliebige positive oder negative [illegible] unter N aber eine andere und numerische Größe muss verstanden wird. Setzen, den ersteren muss aber, der Variablen x entgegengesetzten Zeichen verbunden, die wenn nur will reell genommen werden kann

wo Θ so gewählt ist für Π folgende zwei Werthe annehmen.

$$\Pi = \infty\sqrt{-1} \qquad \Pi = -\infty\sqrt{-1}$$

Hieraus folgt der Werth von y.

$$y = \frac{C}{\int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} \frac{e^{\Pi x}\, d\Pi}{(\Pi-\alpha)^{A+1}}}$$

(42)
$$y = C_1 \int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} \frac{e^{\Pi x}\, d\Pi}{(\Pi-\alpha)^{A+1}(\Pi-\beta)^{A'+1}}$$

mit einer einzigen Constante C_1, der also abermals ein nur allgemeiner, vorläufiger Integral ist, muß verfahren wie in folgende Prozesse zurückkommen werden.

Ein einfacher Fall ist, wenn A und A' gleich Null sind, wenn also der Nenner gleich wird. In diesem Falle geht die Gleichung (31) über in

(43)
$$(U-\alpha)^{A}\, e^{Ux} = 0$$

und kann nämlich durch die Annahme

$$U = \alpha \qquad U = -\infty$$

erfüllt werden wenn A und α positiv sind ist aber A positiv und α negativ durch die Annahme

$$U = \alpha \qquad U = +\infty$$

für negative Werthe von A aber durch

$$U = \pm\infty\sqrt{-1}$$

In allen diesen Fällen verschwindet aber nicht ein einziges particuläres Integral, das nur mit einer Constanten multiplicirt ist. Integrale kann hier bemerkt werden, daß das Integrandum der 3te Bestandtheil der Gleichung (31) ist wir hier ein particulär Integral das zum vollständigen Integral zu ergänzen, dadurch erreicht wird, daß in dem Bruche:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{A_1 U + a_0}{U^2 + b_1 U + b_0} \qquad (44)$$

Zähler und Nenner des gemeinschaftlichen Factor $U-\beta$ y bekommen.

Endlich ist noch der Fall zu betrachten, wo die beiden Wurzeln der Gleichung

$$U^2 + b_1 U + b_0 = 0$$

einander gleich sind. Der Bruch (44) wird dann in 2 partiälbrüche zerlegt von der Form:

$$\frac{A}{(U-\alpha)^2} \quad \text{und} \quad \frac{A'}{U-\alpha}$$

so wird sonach

$$\int \frac{U_0}{U_1} dU = \int \frac{A\, dU}{(U-\alpha)^2} + \int \frac{A'\, dU}{U-\alpha} = -\frac{A}{U-\alpha} + A' \log(U-\alpha) \qquad (45)$$

sind wir wiederum somit der Gleichung 31 gelungen

$$(U-\alpha)^{A'} e^{Ux} - \frac{A}{U-\alpha} = 0 \qquad (46)$$

und diesen wird für unendlichen Werth von A A^{α} α in α mit unendlichen Einheiten gleichgesetzt. Es haben wir, wenn alle diese Größen bis auf α gegeben wären

$$U = \alpha + \varepsilon \qquad U = \infty$$

indem ε einen unendlichen Größen von gegebenen Werthen verschiedenen. Diese führt übereinstimmt zu einem Integral mit einer einzigen willkürlichen Constanten, nämlich

$$y = C_1 \int_{\alpha+\varepsilon}^{+\infty} e^{Ux} + \frac{A}{U-\alpha}(U-\alpha)^{A-2}\, dU \qquad (47)$$

und wir sehen, daß in jener einfachen Fällen das Integral zu welchem wir durch diese Methode gelangen ein unendlich vielfaches ist. Die Ursache hiervon ist, weil die Eliminationsgleichung in solchen Fällen particulären Werthe zuläßt, die nicht unter die in ihnen vorausgesetzte Form eines bestimmten Integrales fallen, sondern die Form einer unendlichen Summe oder mit einer Function von x multiplicirten Exponentialen haben, wie demnächst gezeigt werden soll.

Ein gewöhnliches Beispiel liefert die in vielen Untersuchungen der mathematischen Physik wieder kehrende Gleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} \pm b^2 x y = 0 \qquad (48.)$$

die wir deshalb zu integriren nicht unterlassen wollen.

Wir haben in diesem Falle

$$U_0 = aU$$
$$U_1 = U^2 \pm b^2$$
$$\int \frac{U_0}{U_1} dU = a\int \frac{U dU}{U^2 \pm b^2} = \frac{1}{2} a \operatorname{Log}(U^2 \pm b^2)$$

die Integrale der Gleichung über

$$e^{Ux} + \int \frac{U_0}{U_1} dU = (U^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}a} e^{Ux} = 0 \qquad (49)$$

sind nothwendig

$$U = b \qquad U = -b \qquad U = -\infty \qquad (50)$$

wenn x positiv ist, und man von den beiden Zeichen $\pm$ das untere wählt, oder

$$U = b \qquad U = -b \qquad U = \infty. \qquad (51)$$

für negative x.

Nimmt man in Gegentheil von den beiden Zeichen $\pm$ das obere an, so resultirt nun für positive x: $U = +b\sqrt{-1}$ $U = -b\sqrt{-1}$ $U = -\infty$ (52)

für negative x: $U = +b\sqrt{-1}$ $U = -b\sqrt{-1}$ $U = \infty$ (53)

so besteht somit die Gleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} - b^2 x y = 0$$

nun allgemeines mit zwei constanten willkürlichen Integrale, das für positive x gegeben wird durch die Formel:

$$y = C_1 \int_{-b}^{+b} (U^2 - b^2)^{\frac{1}{2}a-1} e^{Ux} dU + C_2 \int_{-\infty}^{-b} (U^2 - b^2)^{\frac{1}{2}a-1} e^{Ux} dU \qquad (54)$$

für negative Werthe von x aber diese folgende Form:

(55) $$y = C_1 \int_{-b}^{+b} (U^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU + C_2 \int_b^{\infty} (U^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU$$

auch jetzt nun eine Verschiedenheit nicht, auf 3 Dinge beide formale in nur einzige für gegebene und negative x gültige Zusammenfassung kommen, nämlich:

(56) $$y = C_1 \int_{-b}^{+b} (U^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{U\sqrt{x^2}}\,dU + C_2 \int_b^{\infty} (U^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{-U\sqrt{x^2}}\,dU$$

Hinzugenommen mögliche die Gleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + b^2 x y = 0$$

für gegebene x folgende Integrale:

(57) $$y = C_1 \int_0^{b\sqrt{-1}} (U^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU + C_2 \int_0^{-b\sqrt{-1}} (U^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU +$$

für negative x folgende andere: $+ C_3 \int_0^{-\infty} (U^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU$

(58) $$y = C_1 \int_0^{b\sqrt{-1}} (U^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU + C_2 \int_0^{-b\sqrt{-1}} (U^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU + C_3 \int_0^{+\infty} (U^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU$$

während die Constanten der Bedingungsgleichung

(59) $$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$ ~~entsprechen sind~~

entsprechen sind.

Das bestimmte Integral

$$\int_0^{b\sqrt{-1}} (U^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU$$

wird, wenn nun $U\sqrt{-1}$ anstatt U eingeführt

hingewandelt in:

$$-\int_0^{b} (U^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1} e^{Ux\sqrt{-1}}\,dU\sqrt{-1}$$

ebenso verwandelt sich

$$\int_0^{-b\sqrt{-1}} (U^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU$$

durch Einführung von $-U\sqrt{-1}$ anstatt U in:

$$+\int_0^{b} (U^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{-Ux\sqrt{-1}}\,dU\sqrt{-1}$$

Und die Summe

$$C_1 \int_0^{b\sqrt{-1}} (U^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU + C_2 \int_0^{-b\sqrt{-1}} (U^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU$$

wenn nun $C_1 = \frac{1}{2}(B_1 + B_2\sqrt{-1})$, $C_2 = \frac{1}{2}(B_1 - B_2\sqrt{-1})$

jetzt geht über in

$$B_1 \int_0^{b} (U^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1} \sin Ux\,dU + B_2 \int_0^{b} (U^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1} \cos Ux\,dU$$

Daher sich nun die Formeln (57) & (58) auch so beschreiben lassen:

$$y = \int_0^{b} (U^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1} \left[B_1 \sin Ux + B_2 \cos Ux\right] dU + C_3 \int_0^{-\infty} (U^2+b^2)^{\frac{1}{2}-1} e^{Ux}\,dU \qquad (60)$$

$$y = \int_0^{b} (U^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1} \left[B_1 \sin Ux + B_2 \cos Ux\right] dU + C_3 \int_0^{\infty} (U^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{Ux}\,dU \qquad (61)$$

Von diesen gilt die erste für gegebene, die zweite für negative x. Die Constanten B_1 & C_3 sind durch die Bedingungsgleichung:

$$B_1 + C_3 = 0$$

miteinander zu knüpfen, B_2 ist ganz willkürlich. Die Gleichung (48) wird also nur dann vollständig integriert, wenigstens so lange der Coefficient ~~&~~ a nicht 0 und nicht negativ ist

und selbst in den letzt genannten Fällen wäßten wir auch über die allgemeine Integral welches dann unter keine andere Form zu bringen kommt als die gegebene zu bedienen, die Allgemeinheit zu vernachlässigen.

Um so viel als möglich alle die vorgefundenen Fälle zu umfassen und alle Allgemeinheit thunlich zu bewahren, die in der Anwendung unsere Integrationsmethode sich in den Weg stellen können, wollen wir die bisher noch unbestimmte Function (27)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b_1 x \frac{dy}{dx} + y(a_0 + b_0 x) = 0$$

einer nähern Untersuchung unterwerfen. Wir setzen in derselben

$$U_0 = U^2 + a_0$$
$$U_1 = b_1 U + b_0$$

$$(62)\quad \int \frac{U_0}{U_1} dU = \int \frac{U^2 + a_0}{b_1 U + b_0} dU = \frac{U^2}{2b_1} - \frac{b_0 U}{b_1^2} + \left(\frac{a_0}{b_1} + \frac{b_0^2}{b_1^3}\right) \text{Log}(b_1 U + b_0)$$

Und die Gleichung

$$e^{Ux \mp \int \frac{U_0}{U_1} dU} = 0$$

geht, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{a_0}{b_1} + \frac{b_0^2}{b_1^3} = A$$

setzen, über in

$$(63)\quad (b_1 U + b_0)^A e^{Ux + \frac{U^2}{2b_1} - \frac{b_0 U}{b_1^2}} = 0$$

Soll A gegeben, so sind die Constanten ~~(63)~~ dieser Gleichung für gegebene b_1

$$U = -\frac{b_0}{b_1} \qquad U = \pm \infty \sqrt{-1}$$

und $U = -\frac{b_0}{b_1} \qquad U = \pm \infty$

für negative b_1, und auch wenn b x gegeben oder negativ ist.

Wir erhalten somit eine allgemeine Integral auch für gegeben b_1 folgende Gestalt so:

$$y = C_1 \int_0^{-\frac{b_0}{b_1}} (b_1 U + b_0)^{A-1} e^{U(x - \frac{b_0}{b_1^2}) + \frac{U^2}{2b_1}} dU +$$
$$+ C_2 \int_0^{\infty\sqrt{-1}} (b_1 U + b_0)^{A-1} e^{U(x - \frac{b_0}{b_1^2}) + \frac{U^2}{2b_1}} dU + \qquad (64)$$
$$+ C_3 \int_0^{-\infty\sqrt{-1}} (b_1 U + b_0)^{A-1} e^{U(x - \frac{b_0}{b_1^2}) + \frac{U^2}{2b_1}} dU$$

Zwischen den Constanten C_1 C_2 C_3 findet die Bedingungsgleichung

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

Statt. Die beiden zwei in der Formel (64) vorkommenden bestimmten Integrale wandeln wir durch Einführung von $U\sqrt{-1}$ und $-U\sqrt{-1}$ anstatt U um, und bemerken zu dem, daß in folgenden $\pm$ zwei reductionen Gleichungen

$$(b_0 \pm b_1 U\sqrt{-1})^{A-1} = (b_0^2 + b_1^2 U^2)^{\frac{A-1}{2}} \left[\cos((A-1)\,\text{Arc tg}\,\frac{b_1 U}{b_0}) \pm \right. \qquad (65)$$
$$\left. \pm \sqrt{-1} \sin((A-1)\,\text{Arc tg}\,\frac{b_1 U}{b_0})\right]$$

$$e^{\pm U\sqrt{-1}(x - \frac{b_0}{b_1^2})} = \cos U(x - \frac{b_0}{b_1^2}) \pm \sqrt{-1} \sin U(x - \frac{b_0}{b_1^2}) \qquad (66.)$$

und die noch übrigens willkürlich hinzugefügten

$2C_1 = B_1 - B_2\sqrt{-1}$ $\qquad 2C_3 = B_1 + B_2\sqrt{-1}$

in Formel (64) und so ausgedrückt werden kann

$$y = C_1\int_0^{-\frac{b_0}{b_1}} (b_1U+b_0)^{A-1} e^{\frac{U^2}{2b_1}+U(x-\frac{b_0}{b_1^2})}\,dU$$

$$+ B_2\int_0^{\infty} e^{-\frac{U^2}{2b_1}} (b_0^2+b_1^2U^2)^{\frac{A-1}{2}} \cos\left(U(x-\tfrac{b_0}{b_1^2})+(A-1)\operatorname{Arctg}\tfrac{b_1U}{b_0}\right)dU \qquad (67.)$$

$$+ B_1\int_0^{\infty} e^{-\frac{U^2}{2b_1}} (b_0^2+b_1^2U^2)^{\frac{A-1}{2}} \sin\left(U(x-\tfrac{b_0}{b_1^2})+(A-1)\operatorname{Arctg}\tfrac{b_1U}{b_0}\right)dU$$

die Constanten B_1 und C_1 müssen so gewählt werden, daß $B_1 + C_1 = 0$ wird, B_2 ist willkürlich.

Für den Fall, daß B_1 negativ ist, sind in die Rechnung Formel (64) oder (67) folgende andere zu Grunde

$$y = C_1\int_{-\infty}^{\frac{b_0}{b_1}} (b_0-b_1U)^{A-1} e^{-\frac{U^2}{2b_1}+U(x-\frac{b_0}{b_1^2})}\,dU + \qquad (68.)$$

$$+ C_2\int_{\frac{b_0}{b_1}}^{+\infty} (b_0-b_1U)^{A-1} e^{-\frac{U^2}{2b_1}+U(x-\frac{b_0}{b_1^2})}\,dU$$

Hier haben wir b_1 in $-b_1$ umgewandelt, um die negativen Exponenten dieser Coefficienten dem Auge möglichst zu meiden.

Die Formeln (67.) und (68.) gelten beide nur gebrochene A und b_0 gelten nicht mehr, wenn diese $\frac{b_0}{b_1}$ gerade, und b wird aber negativ. Letzteres tritt nun, wenn Zähler und Nenner des Bruches $\frac{b_0}{b_1}$ einen gemeinschaftlichen Factor besitzen, ein Fall, der bei unsern Problemen gewöhnlich nicht. Wir haben in der That für ganzzahlige und negative A endlich

Übrigens nur noch zu der Gleichung (63) gehörende Formeln, nämlich

$$U = \pm\infty\sqrt{-1}$$

für gewisse b_1 und $U = \pm\infty$ für negative Werthe dieser Coefficienten, und somit für gewisse b_1 folgende particuläre Integrale

$$y = C_1\int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\frac{U^2}{2b_1}+U(x-\frac{b_0}{b_1^2})}\frac{dU}{(b_0+b_1U)^{A+1}} \qquad (69.)$$

für negative b_1 hingegen

$$y = C_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{U^2}{2b_1}+U(x-\frac{b_0}{b_1^2})}\frac{dU}{(b_0-b_1U)^{A+1}} \qquad (70.)$$

Diese haben in der That dieselben Gleichungen $-A$ anstatt A, in der zweiten überdies $-A = -b_1$ anstatt A und b_1 gesetzt. Nun die negative Exponentialgröße wieder zu Grunde zu nehmen.

Hier werden wir gebrochene Formeln auf diese formeln zurückbringen, und gerade wie die für ganzzahlige ursprünglich gefundenen Integrale für ganzzahlige wurden, so werden wir auch die Übergänge gewinnen werden, wo wir uns die Übergänge gestatten dürfen. Doch die ursprüngliche Ableitung bestätigt diesen Weg und nöthigt uns eine Übereinkommenheit zu geben, sich vielmehr in einem Verfahren übergeleitet, wo wir sich übersehen, in jene vielen Zweifeln der mathematischen Analysis, die Lösung muss bloß, daß eine überwindenden Schwierigkeit nebst den Übergang dieselben verringern Vortheil uns auf mittelbarste den andern abtreiben, neue Integrale zu erfinden, sind oft zu unendlichen Entdeckungen zu gewinnen.

Damit nun aber den bisher noch nicht benutzten speziellen Fall
$a_0 = 0$ also $b_1 = 0$ ist, dann wird das Integral

$$\int \frac{\eta_0}{\eta_1} d\eta$$

nicht mehr durch die Formel (62) dargestellt und wir haben
deshalb, gerade wie oben, auszugehen:

$$\int \frac{\eta_0}{\eta_1} d\eta = \int \frac{\eta_2 + a_0}{b_0} d\eta = \frac{\eta^3}{3b_0} + \frac{a_0}{b_0}\eta. \tag{71}$$

Im dritten Falle dann Gleichung (63) aber heißt

$$e^{\eta\alpha + \frac{\eta^3}{3b_0} + \frac{a_0}{b_0}\eta + \varphi} = 0; \tag{72}$$

hieraus wird durch Logarithmieren η genügt, falls

$$\frac{\eta^3}{b_0} = -\infty$$

ist, also $\eta = -\infty$ $\eta = \infty(-1+\sqrt{-3})$ und $\eta = \infty(-1-\sqrt{-3})$.

Somit also ein Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y(a_0 + b_0 x) = 0 \tag{73}$$

in folgender Form vor:

$$y = C_1 \int_0^{-\infty} e^{-\eta(x+\frac{a_0}{b_0}) + \frac{\eta^3}{3b_0}} d\eta + C_2 \int_0^{\infty(-1+\sqrt{-3})} e^{\eta(x+\frac{a_0}{b_0}) + \frac{\eta^3}{3b_0}} d\eta + C_3 \int_0^{\infty(-1-\sqrt{-3})} e^{\eta(x+\frac{a_0}{b_0}) + \frac{\eta^3}{3b_0}} d\eta \tag{74}$$

in den die Konstanten $C_1 C_2 C_3$ der Bedingungsgleichung

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

unterworfen gedacht werden.

Von den drei bestimmten Integralen, die den partiellen Teil
der Gleichung (74) bilden, formen wir das mittlere durch
Substitution von $-\eta$ anstatt η, das zweite durch Setzen
von $\eta(-1+\sqrt{-3})$ anstatt η, das dritte durch Setzen
von $\eta(-1-\sqrt{-3})$ anstatt η um, und bezeichnen der Kürze
wegen die beiden imaginären Einheiten $-1+\sqrt{-3}$ und $-1-\sqrt{-3}$ durch
r_1 und r_2, und erhalten anstatt (74)

$$y = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\eta^3}{3b_0}} d\eta \left[C e^{-\eta(x+\frac{a_0}{b_0})} + C_2 e^{r_1\eta(x+\frac{a_0}{b_0})} + C_3 e^{r_2\eta(x+\frac{a_0}{b_0})} \right]. \tag{75}$$

Ist b_0 — ungültig — und handelt es sich nun um die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y(a_0 - b_0 x) = 0 \tag{76}$$

so erhält man genau die gleichen Integrale

$$y = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\eta^3}{3b_0}} d\eta \left(C_1 e^{\eta(x-\frac{a_0}{b_0})} + C_2 e^{r_1\eta(x-\frac{a_0}{b_0})} + C_3 e^{r_2\eta(x-\frac{a_0}{b_0})} \right); \tag{77}$$

es ist abermals

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

wenn r_1 und r_2 bekommen nun aber eine andere Bedeutung; sie
sollen nämlich aber die zwei imaginären Kubikwurzeln der
Gleichung

$$\eta^3 = 1.$$

DSI

Hieraus ~~folgt~~ kann nun also die Form erwartet die bey der Integration einer Differenzengleichung der ganzen Ordnung von der betrachteten so wie vorkommen mögen und es ist nunmehr blos übrig eine allgemeine Integral mit ganz Constanten aufzusuchen, wo wir aber nie gehabt nicht sondern bekommen wir vermöge wir gattenübrig nie partikulär mit einer einzigen Constanten. Dazu wir nun gehen wir der Letzteren zu ausgelassenen gehen wird es gut gehen noch einige Beispiele der Integration solcher Gleichungen anzustellen, die die ganze Art mag übersehen. ~~Es~~ mit also zugehen die Differenzengleichung n^ten Grades:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a^x y = 0 \tag{78}$$

so ist hier

$$\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_n \quad , \quad \mathfrak{N}_1 = a$$

$$\int \frac{\mathfrak{N}_0}{\mathfrak{N}_1} d\mathfrak{N} = \frac{1}{a} \int \mathfrak{N}^n d\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{N}^{n+1}}{a(n+1)}$$

$$e^{\mathfrak{N}x + \int \frac{\mathfrak{N}_0}{\mathfrak{N}_1} d\mathfrak{N}} = e^{\mathfrak{N}x + \frac{\mathfrak{N}^{n+1}}{a(n+1)}} = 0. \tag{79}$$

diese letztere Gleichung genügen alle Werthe von $\mathfrak{N}$, die der Gleichung $\mathfrak{N}^{n+1} = -a$ ganzzahlige Coefficienten.

$$\mathfrak{N}^{n+1} = -\infty \tag{80}$$

ganzzahlige Coefficienten, vorausgesetzt dass a positiv ist.

Damit nun aber die Wurzeln der Gleichung

$$\mathfrak{N}^{n+1} = -1$$

$\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_{n+1}$, so sind die Wurzeln dem (80)

$$\mu_1 \infty \ , \ \mu_2 \infty \ , \ \mu_3 \infty \ \ldots \ \mu_{n+1} \infty \ ;$$

worauf also das allgemeine Integral von (78) folgt, nämlich:

$$y = C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{\mathfrak{N}x + \frac{\mathfrak{N}^{n+1}}{a(n+1)}} d\mathfrak{N} + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{\mathfrak{N}x + \frac{\mathfrak{N}^{n+1}}{a(n+1)}} d\mathfrak{N} + C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{\mathfrak{N}x + \frac{\mathfrak{N}^{n+1}}{a(n+1)}} d\mathfrak{N}$$

$$+ \cdots + C_{n+1} \int_0^{\mu_{n+1} \infty} e^{\mathfrak{N}x + \frac{\mathfrak{N}^{n+1}}{a(n+1)}} d\mathfrak{N} \ , \tag{81}$$

wobei gleichen drei Constanten die Endigungsgleichung besteht:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_{n+1} = 0.$$

Die $n+1$ bestimmten Integrale in der Formel (81) lassen sich in nur einzigen zusammenziehen, wenn man in ihnen, der Reihe nach $\mu_1 \mathfrak{N}, \mu_2 \mathfrak{N} \ldots \mu_{n+1} \mathfrak{N}$ resultat $\mathfrak{N}$ einsetzt und zugleich $\mu_1 C_1, \mu_2 C_2 \ldots \mu_{n+1} C_{n+1}$ durch die willkührlichen Constanten $B_1, B_2 \ldots B_{n+1}$ ausdrückt:

$$y = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\mathfrak{N}^{n+1}}{a(n+1)}} d\mathfrak{N} \left[B_1 e^{\mu_1 \mathfrak{N}x} + B_2 e^{\mu_2 \mathfrak{N}x} + B_3 e^{\mu_3 \mathfrak{N}x} + \cdots + B_{n+1} e^{\mu_{n+1} \mathfrak{N}x} \right] \tag{82}$$

Um gewissen den Constanten B, stets geltende Lagerung ist jetzt folgende:

$$\frac{B_1}{\mu_1} + \frac{B_2}{\mu_2} + \frac{B_3}{\mu_3} + \cdots + \frac{B_{n+1}}{\mu_{n+1}} = 0$$

die Formel (82) gibt uns für negative Werte von a u.s.f. nun gibt uns ein Integral der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} - a^n y = 0$$

nun jene, im Falle a negativ ist, $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_{n+1}$ verschiedene Wurzeln der Gleichung

$$\mathfrak{N}^{n+1} = -1$$

jenachdem zieht man $\sqrt{-1}$ in den einen oder den andern

$$\mathfrak{N}^{n+1} = 1 .$$

Wenn wir jetzt die gesuchte Integral folgende differenzielle Gleichung der $n$ten Ordnung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + (a_0 + b_0 x) y = 0 \qquad (83)$$

in welcher der neben entwickelten (78) als ein spezieller Fall enthalten ist, so bekommen wir

$$\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}^n + a_{n-1}\mathfrak{N}^{n-1} + a_{n-2}\mathfrak{N}^{n-2} + \dots + a_0$$

$$\mathfrak{N}_1 = b_0 + x\mathfrak{N}$$

$$\int \frac{\mathfrak{N}_0}{\mathfrak{N}_1} d\mathfrak{N} = \frac{1}{b_0}\left[\frac{\mathfrak{N}^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}\mathfrak{N}^n + \frac{a_{n-2}}{n-1}\mathfrak{N}^{n-1} + \dots + a_0 \mathfrak{N}\right]$$

und anstatt der Gleichung

$$e^{\mathfrak{N}x + \int \frac{\mathfrak{N}_0}{\mathfrak{N}_1} d\mathfrak{N}} = 0$$

die folgende:

$$e^{\mathfrak{N}x + \frac{1}{b_0}\left[\frac{\mathfrak{N}^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}\mathfrak{N}^n + \frac{a_{n-1}}{n-1}\mathfrak{N}^{n-1} + \dots + a_0 \mathfrak{N}\right]} = 0 \qquad (84)$$

Diese aber wird ganz gelöscht für alle jene Werte

von $\mathfrak{N}$ für welche

$$\frac{\mathfrak{N}^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{\mathfrak{N}^n}{n} + a_{n-2}\frac{\mathfrak{N}^{n-1}}{n-1} + \dots + a_0 \mathfrak{N} = \mp\infty \qquad (85)$$

Wenn nun in gewissen Stufen verschiedene unendliche Größen als absolute oder entgegen gesetzte genommen, so verschwindet b_0 positiv ist oder negativ. Diese Werte von $\mathfrak{N}$ können nun unendlich groß, so wird also die Gleichung (83) übergehen in (84) mit seinen einfachen Gliedern zugleich unendlich und zugleich positiv oder negativ. Hieraus folgt also diese neue Gleichung die verschiedene

$$\mathfrak{N}^{n+1} = \mp\infty \qquad (86)$$

wird jedesmal n Werte können. Nehmen wir nun einen bestimmten Fall von n an, so haben wir die Wurzeln der Gleichung (86) positiv, so nennen wir die Wurzeln der diese Annahme entsprechenden Gleichung, die in (86) genommen mit den oberen der beiden Zeichen ist:

$$\mu_1 \infty \,,\ \mu_2 \infty \,,\ \mu_3 \infty \dots \mu_{n+1} \infty$$

so ist das gesuchte allgemeinen Integral unserer differentiellen Gleichung

$$\begin{aligned} y = {} & C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{\mathfrak{U}x + \frac{1}{b_0}\left[\frac{\mathfrak{U}^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{\mathfrak{U}^n}{n} + \dots + a_0 \mathfrak{U}\right]} d\mathfrak{U} \\ & + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{\mathfrak{U}x + \frac{1}{b_0}\left[\frac{\mathfrak{U}^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{\mathfrak{U}^n}{n} + \dots + a_0 \mathfrak{U}\right]} d\mathfrak{U} \\ & + C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{\mathfrak{U}x + \frac{1}{b_0}\left[\frac{\mathfrak{U}^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{\mathfrak{U}^n}{n} + \dots + a_0 \mathfrak{U}\right]} d\mathfrak{U} \\ & + \dots \\ & + C_{n+1} \int_0^{\mu_{n+1} \infty} e^{\mathfrak{U}x + \frac{1}{b_0}\left[\frac{\mathfrak{U}^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{\mathfrak{U}^n}{n} + \dots + a_0 \mathfrak{U}\right]} d\mathfrak{U} \end{aligned} \qquad (87)$$

DSI

die Constanten der Integration, $C, C_1 \ldots C_{n+1}$ sind an die Bedingungsgleichung

$$C + C_1 + C_2 + \ldots + C_{n+1} = 0$$

gebunden. Die $n+1$ bestimmten Integrale die in der Formel enthalten sind, lassen sich in einziges zusammenfassen, indem die selben zunächst auf 0 geschrieben werden kann.

$$y = \sum_1^{n+1} \left[C_\alpha \int_0^{\mu_\alpha \infty} e^{ux + \frac{1}{b_0}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{u^n}{n} + \ldots + a_0 u\right]} du \right] \tag{88}$$

Das Summenzeichen auf die Zahl α bezogen, lässt sich wenn $\mu_\alpha u$ anstatt u, und sonach den letzten Ausdruck so um, in:

$$y = \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{u^{n+1}}{b_0(n+1)}} du \sum_1^{n+1} \left[\mu_\alpha C_\alpha e^{\mu_\alpha^{n+1} ux + \frac{1}{b_0}\left[a_{n-1}\frac{\mu_\alpha^n u^n}{n} + \ldots + a_0 \mu_\alpha u\right]} \right] \right\} \tag{89}$$

Dieselbe Formel gilt auch für negative b_0, und bietet somit das Integral der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + (a_0 - b_0 x) y = 0$$

wenn man nun unter $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{n+1}$ nicht mehr als Wurzeln der Gleichung $u^{n+1} = -1$ verstehen, wodurch die in der andern $u^{n+1} = 1$ verschwindet.

Mißlich wie zuletzt also beispielsweise noch eine Gleichung der n^{ten} ~~Grades~~ Ordnung, bei welcher immer, mindest die niederste Mindestzahl besitzt, weil wir mittelst derselben nun ein particuläres Integral mit zwei oder 3 Constanten weniger als nöthig ist, und also die Ordnungszahl der Gleichung leichter zu integriren fällt, erhalten; nämlich

$$x \frac{d^n y}{dx^n} \pm a^2 y = 0 \tag{90}$$

C ist hier

$$u_0 = \pm a^2, \quad u_1 = u^n, \quad \int \frac{u_0}{u_1} du = \pm a^2 \int \frac{du}{u^n} = \mp \frac{a^2}{(n-1)u^{n-1}}$$

und die Gleichung zur Bestimmung der Größen

$$e^{ux \mp \frac{a^2}{(n-1)u^{n-1}}} = 0$$

welche lauten, wenn $u = \frac{1}{v}$ gesetzt wird, übergeht in: (91)

$$e^{\frac{x}{v} \mp \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} = 0.$$

Entnehmen wir hier zunächst den Fall, wo x positiv ist, und gilt das Zeichen $\mp$ das untere, gilt die Wurzeln der letzten Gleichung sind dann alle diejenigen Werthe von v, die einen der beiden folgenden Gleichungen entfallen:

$$v = -\varepsilon \qquad v^{n-1} = -\infty$$

unter ε eine unendlich abnehmende, mithin null werdende positive oder selbst imaginäre Zahl verstanden, deren reeller Theil positiv ist. Bezeichnen wir jetzt die Wurzeln der Gleichung $v^{n-1} = -1$, mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots \mu_{n-1}$ so sind die der Gleichung $v^{n-1} = -\infty$

$$\mu_1 \infty, \quad \mu_2 \infty \quad \mu_3 \infty, \ldots \quad \mu_{n-1} \infty$$

Unter jenen wird $\frac{1}{2}n$ reelle negative oder selbst imaginäre geben, deren reeller Theil negativ ist; und andern reelle positive oder selbst imaginäre, deren reeller Theil positiv ist; man findet sie wie vorhin, so daß man zwei Abtheilungen von Wurzeln bekommt, und wir wollen voraussetzen, daß $\mu_1 \infty \; \mu_2 \infty \ldots \mu_x \infty$ die x ersten Abtheilung $\mu_{x+1} \infty, \mu_{x+2} \infty \ldots \mu_{n-1} \infty$, die

den zweiten Abtheilung angehörenden seien, den speciellen Fall einstweilen ausser Acht lassen, wo unter den bezeichneten Wurzeln sich paare reine imaginäre $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ vorbefinden.

Es bietet sich nun unter diesen Voraussetzungen nur der Fall r particulärer Integrale an, die je mit willkürlichen Constanten multiplicirt und addirt nun vollständigen Ausdruck liefern, der nun schon gesetzt für y folgenden Ausdruck liefern, der nun schon gesetzt für positives x gültig ist:

(92)
$$y = C_1 \int_{\mu_1 \varepsilon}^{\mu_1 \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv + C_2 \int_{\mu_2 \varepsilon}^{\mu_2 \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv + \cdots + C_r \int_{\mu_r \varepsilon}^{\mu_r \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv$$

und dessen einzelne Theile durch bezüglich Vertauschung der Variablen v in $\mu_1 v$ $\mu_2 v$ $\cdots$ $\mu_r v$ verwandelt werden können, so dass man erhält:

(93)
$$y = -\int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv \left(C_1 e^{\frac{x}{\mu_1 v}} + C_2 e^{\frac{x}{\mu_2 v}} + \cdots + C_r e^{\frac{x}{\mu_r v}} \right)$$

Dieses innerhalb der Grenzen 0 und ∞ genommene Integral muss für alle die Grenze ausgeschlossen werden, in welchen sich auch innerhalb der Grenzen ε und ∞ genommene Factorenfunctionen nähern bei ihrem convergiren von ε gegen Null.

An die Stelle dieses Gemenges hat nun x nicht positiv sondern negativ wären, offenbar folgendes andere zu treten:

(94)
$$y' = C_{r+1} \int_{\mu_{r+1} \varepsilon}^{\mu_{r+1} \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv + C_{r+2} \int_{\mu_{r+2}}^{\mu_{r+2} \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv + \cdots + C_{n-1} \int_{\mu_{n-1} \varepsilon}^{\mu_{n-1} \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv$$

oder, nach vorangegangenen ähnlichen Reductionen wie oben angewendet

(95)
$$y = -\int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv \left(C_{r+1} e^{\frac{x}{\mu_{r+1} v}} + C_{r+2} e^{\frac{x}{\mu_{r+2} v}} + \cdots + C_{n-1} e^{\frac{x}{\mu_{n-1} v}} \right)$$

Wir haben bisher nur von einer Verwendung der Wurzeln der Gleichung $v^{n-1} = -1$ Gebrauch zu machen Veranlassung; die übrigen bisher bei ihrer Entfernung als Grenzen der Integration entweder den Nullpunkt, oder den Unendlichen unter den Integralzeichen und immerfort den Grenzen Null und Unendlich durchgeht, ist das Integral also selbst in seinem übergeht, die etwas analoges mit einer Discontinuität gemeinen Sinn hat, oder ob vielmehr ganz beide Grenzen zum Unendlichen, und das bestimmte Integral den Null gleich. Gleiches wird vorausgesetzt sein in den beiden Zeichen $\mp$ in (91) beim letzten Falle, wo von den beiden Zeichen $\mp$ in (91) das ~~unten~~ oben zu gelten hat, d. h. wo:

$$x \frac{d^n y}{dx^n} + a^2 y = 0$$

die zu integrirende Gleichung ist. Sind nämlich $\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r$ und $\mu_{r+1} \mu_{r+2} \cdots \mu_{n-1}$ die Wurzeln der Gleichung $v^{n-1} = -1$ zufolge bereits in 2 Abtheilungen, deren ersten diejenigen begreift, die reelle negative, die zweite diejenigen, die reelle positive Bestandtheile besitzen, so haben wir für positives x ein Integral für y, die ~~bis auf den Factor etwa~~ eben so wenig mit (93) und für negatives x nur ein anderes zu erwarten, die reine Null eben so wenig mit der (95) übereinstimmt.

Nehmen nämlich unter den mit μ bezeichneten Wurzeln die reinen imaginären $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ vor, so entspricht

Setzen wir einzelne particuläre Integral von der Form:

$$y = C\int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^n v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2}\,dv$$

So kann durch Umwandlung von v in $v\sqrt{-1}$ umformen kann in:

$$y = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x\sqrt{-1}}{v} - \frac{a^n v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2}\,dv$$

und dieses particuläre Integral ist dann zu den übrigen in die Formeln (93) und (95) hinzuzufügen, welche hinzuzufügen sind.

Setzen wir nun den besonderen allgemeinen zu den speciellen Integral der Gleichung der 3ten Ordnung über

$$x\frac{d^3y}{dx^3} - y = 0 \qquad (96)$$

so erhalten wir an die Stelle der (91)

$$e^{\frac{x}{v} + \frac{1}{2}v^2} = 0 \qquad (97)$$

und somit $v = \pm\infty\sqrt{-1}$, daraus gibt uns particuläre. das einzige Integral mit einer einzigen Constante

$$y = C\int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\frac{x}{v} + \frac{1}{2}v^2} v\,dv$$

oder durch Umänderung von v in $v\sqrt{-1}$

$$y = -C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x\sqrt{-1}}{v} - \frac{1}{2}v^2} v\,dv$$

Da hier $e^{-\frac{x\sqrt{-1}}{v}} = \cos\frac{x}{v} - \sqrt{-1}\sin\frac{x}{v}$ ist, so läßt sich dieses Integral in zwei zerlegen von welchen das erste mit dem $\cos\frac{x}{v}$ verknüpfte identisch Null, das andere aber

auch zwei gleichen Theilen zusammengesetzt ist, deren zwischen den Grenzen $-\infty$ und Null und den zwischen Null und ∞ genommen, so daß der Werth von y auf b einfach angegeben werden kann:

$$y = B\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} \sin\frac{x}{v}\, v\,dv \qquad (98)$$

Setzen wir aber endlich (96) folgende andere Gleichung der 3ten Ordnung

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + y = 0 \qquad (99)$$

zu integriren, so bekommen wir:

$$e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{2}v^2} = 0$$

somit $v = \pm\infty$, und somit entweder

$$y = C\int_0^{-\infty} e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{2}v^2} v\,dv$$

oder:

$$y = C\int_0^{+\infty} e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{2}v^2} v\,dv$$

je nachdem x positiv ist oder negativ; so daß man allgemein für beliebiges x schreiben könnte:

$$y = C\int_0^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{x^2}}{v} - \frac{1}{2}v^2} v\,dv \qquad (100)$$

In jedem Falle haben wir nun einer Gleichung der 3ten Ordnung auf dem hier betrachteten Wege eine particuläre. Integral mit einer einzigen Constanten gefunden, welche noch durch einen Zusatz zu vervollständigen sein wird, der 2 willkürliche Constanten enthalten muß. Noch übrig ist das Resultat eben wie bei folgenden

Gleichung der fünften Ordnung hingegen.

$$x\frac{d^5y}{dx^5} + y = 0 \tag{101}$$

Hier wird zu lösen sein

$$e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{4}v^4} = 0$$

und somit: $v = \pm\infty$ oder $v = \pm\infty\sqrt{-1}$, also für gel. diese x oder negative x

$$y = C_0\int_0^{-\infty} e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{4}v^4} v^3 dv + C_2\int_{-\infty}^{+\infty\sqrt{-1}} e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{4}v^4} v^3 dv \tag{102}$$

also nur ein Integral mit 2 Constanten, der eines schon vollständig bestimmt ist, die 3 andern in sich begreifen muß.

§ 2.

Lösung derjenigen Fälle, in welchen die gegebenen Integrationsmethoden nur ein vollständiges Integral liefert, und Vergleichung desselben

Der Weg, den wir für Integration jener Differenzialgleichung zu einzuschlagen haben, wenn Coefficienten linear functionen des unabhängigen Variablen sind, ist im Allgemeinen folgender. Wir setzen das gesuchte Integral

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{ux} v\, du$$

und erhalten nach gehöriger Substitution

$$V = \frac{C}{u_1} e^{\int \frac{u_0}{u_1} du} \tag{1}$$

und zur Bestimmung des Integrals

$$\left\{ C e^{u_2 x + \int \frac{u_0}{u_1} du} \right\}_{u'}^{u''} = 0 \tag{2}$$

wo dann offenbar aus jeder Auflösung der obigen Gleichung ein allgemeines Integral mit n Constanten gefunden werden kann, wenn die Gleichung (2) oder die gesuchte an ihrer Stelle besteht

$$e^{ux + \int \frac{u_0}{u_1} du} = 0 \tag{3}$$

Vorgelegt gesetzt, $n+1$ von den Factoren, welchen u gleich Null gesetzt sind die sich ergeben aus der Integration, durch die Integrationsconstanten ausgedrückt, und u_1 zu einer Function von u gemacht ist, und u' und u'' die Werthe, welche die Variable u annehmen soll, damit y identisch gleich Null, oder y und die übrigen n nicht verschwinden, oder unter gewissen Voraussetzungen die n ersten, die n letzten oder die zwischen mit den ersten, zwischen liegenden, z.b. wenn der Fall ist, wenn die Factoren unter dem Integrationszeichen in Bezug auf die Integration gewisse Bedingungen erfüllen.

Erfolgen die jetzt die Fälle in welchen einige der Wurzeln der Gleichung (3) zusammenfallen, offenbar kommt hier alles an auf die Form, in welcher das Integral

$$\int \frac{M_0}{N_1}\, dx \tag{4}$$

erscheint, und wenn man sich bekanntlich bei der Berechnung desselben auf folgende Weise: der Bruch $\frac{M_0}{N_1}$ wird stets in ein ganzes Polynom, multiplizirt in eine ganze Function und in einen echten Bruch, diese giebt die Form

$$\frac{M_0}{N_1} = L + \frac{M}{N_1} \tag{5}$$

und das $\int L\,dx$ ein polynomisches ganz rationales Glied, wenn N_1 den Grad $n-r$ hat. Jetzt zerlegt man N_1 in seine Factoren die entweder einfach oder mehrfach vorhanden sein können, und den echten Bruch $\frac{M}{N_1}$ in Partialbrüche, multiplicirt mit dx und integrirt, wobei man offenbar nur mit Formen zu thun hat wie

$$\int L\,dx,\ \int \frac{A\,dx}{x-\alpha},\ \int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^m}; \tag{6}$$

das erste dieser drei Integrale ist eine ganze Function vom Grade $r+1$, das zweite ein Logarithmus von $x-\alpha$, das dritte ein algebraischer Bruch. Ist jetzt wie vorher die Gleichung (3) gegeben, so wird

$$\frac{(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\cdots}{(x-\beta_1)^{\beta_1}(x-\beta_2)^{\beta_2}\cdots} \cdots + \frac{\gamma}{(x-\beta)^{m-1}} + \cdots = 0 \tag{7}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \beta_1, \beta_2 \ldots$ sind einfache reelle, $\gamma \ldots$ reelle oder imaginäre Zahlen, $-\beta_1, -\beta_2 \ldots$ sind einfache reelle oder imaginäre Wurzeln der Gleichung $N_1 = 0$; $x, x \ldots$ sind reelle oder imaginäre Variable, $\frac{\gamma}{(x-\beta)^{m-1}}$ ein Partialbruch, der entweder reell oder imaginär sein kann, je nachdem β reell oder imaginär ist, und mit β_1, β_2 mit denen gleiche Zeichen hat.

Die vorstehende Betrachtung der Gleichung (7) lässt nun folgende Sätze zu, die sich leicht beweisen lassen und welche nun folgende verschiedene Fälle:

1. Wenn weder der Zähler noch der Nenner des Quotienten, welcher gleich ist der Summe der Partialbrüche $\frac{A}{x-\alpha_1}, \frac{A}{x-\alpha_2}, \frac{B}{x-\beta_1}, \frac{B}{x-\beta_2} \ldots$ verschwindet, wie oft man x einen Werth beilegt, so muss N_0 und N_1 einen gemeinschaftlichen Factor besitzen.
2. Wenn mehrere Faktoren des einfachen Partialbruchs $\frac{A}{x-\alpha}$, oder wie wir sagen, mit $x-\alpha$ reelle Zeichen gleich sind, so kann x einen Factor von der Form $(x-\beta)^{\beta}$ in seiner Zerlegung haben, wobei $x-\beta$ reell ist.
3. Wenn die Gleichung $N_1 = 0$ gleiche Wurzeln besitzt, so wird jetzt die Frage aufgeworfen, wie oft in einigen solchen Fällen $x-\alpha$ als Divisor vorhanden sein muss, damit N_0 durch N_1 ohne Rest theilbar ist.

Im ersten Falle wo N_0 und N_1 einen gemeinschaftlichen Factor haben von der Form $x-\alpha$ oder $(x-\alpha)^m$, entspricht der Differentialgleichung, welche sogenannten Integralen als die durch einen Factor x partikulären welche entweder als gleich einem Exponentialen $e^{\alpha x}$, nämlich $e^{\alpha x}$ oder $e^{\alpha x}$ folgende endlich

$$e^{\alpha x}\left(C + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{m-1} x^{m-1}\right) \tag{8}$$

* Dass wir uns hier auf Polynome mit reellen Coefficienten beschränken, ist für unsere Zwecke ohne Belang, da ja jedes Polynom mit imaginären Coefficienten sich in zwei Polynome mit reellen Coefficienten P und Q zerlegen lässt, so dass $P + iQ = 0$ ist, wenn $P = 0$ und $Q = 0$ ist. Ebenso ist es für unsere Betrachtungen gleichgültig, ob N_0 kein oder n mal N_1 enthalten ist, denn wenn $N_0 = N_1^n$ ist, so ist $\frac{N_0}{N_1} = N_1^{n-1}$ und $\int \frac{N_0}{N_1}\,dx = \int N_1^{n-1}\,dx$ ist wieder ein Polynom.

Je der Ort, schon wir in der Differenzialgleichung
(A81) $y = e^{\alpha x}$ zu verschen sind, substituirt so erhalten

$$(A_0 + A_1 x)\, e^{\alpha x} = 0$$

(4) Wenn jetzt A_0 und A_1 den gemeinschaftlichen Factor $x-\alpha$ besitzen, so wird die Gleichung für $x=\alpha$ genügt, und somit ist ein particuläres Integral

$$y = e^{\alpha x},$$

(5) Setzen wir ebenso $x-\alpha'$, $x-\alpha''$ $\ldots$ $x-\alpha^{(m-1)}$ gemeinschaftliche Factoren von A und A_1, so erhalten wir ein particuläres Integral

$$y = C e^{\alpha x} + C' e^{\alpha' x} + \ldots + C^{(m-1)} e^{\alpha^{(m-1)} x}.$$

Setzt man die Constanten $\alpha, \alpha' \ldots \alpha^{(m-1)}$ gegen einander gleich, und setzt

$$\alpha' = \alpha + \varepsilon', \quad \alpha'' = \alpha + \varepsilon'' \ldots \quad \alpha^{(m-1)} = \alpha + \varepsilon^{(m-1)}$$

unter ε eine kleine Grösse verstanden, so geht (5) über in

(12) $$y = e^{\alpha x}\left(C + C' e^{\varepsilon' x} + C'' e^{\varepsilon'' x} \ldots + C^{(m-1)} e^{\varepsilon^{(m-1)} x}\right).$$

Entwickelt man auch die einzelnen Exponentialien in diesem Ausdrucke, ordnet nach Potenzen von ε und setzt abkürzend:

$$\begin{aligned}
C + C' + C'' + \ldots + C^{(m-1)} &= \mathfrak{B} \\
C'\varepsilon' + C''\varepsilon'' + \ldots + C^{(m-1)}\varepsilon^{(m-1)} &= \mathfrak{B}' \\
C'\varepsilon'^2 + C''\varepsilon''^2 + \ldots + C^{(m-1)}\varepsilon^{(m-1)2} &= 2\mathfrak{B}'' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
C'\varepsilon'^{(m-1)} + C''\varepsilon''^{(m-1)} + \ldots + C^{(m-1)}\varepsilon^{(m-1)(m-1)} &= 2.3\ldots m-1\,\mathfrak{B}^{(m-1)}
\end{aligned} \tag{10}$$

so resolvirt werden wenn die bekannten Glieder einer Reihe nach den Potenzen der Exponenten zunächst gegen die Null, fortgehend in einem fortschreitenden Factor $\alpha - \alpha$ multiplicirt mit fortlaufende particuläre Integrale

$$y = e^{\alpha x}\left(\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' x + \mathfrak{B}'' x^2 + \ldots + \mathfrak{B}^{(m-1)} x^{m-1}\right) \tag{14}$$

welche mit (8) der Form nach übereinstimmt. Nun wohl es nöthig sein möchte einen Augenblick stehen bleiben müssten, ob wohl ein Integral in irgendeiner Form nothwendig sein könnte, das wir bei unserer Methode vernachlässigt haben, in der Form (1) nämlich, so lässt sich diese Zweifel dahin erledigen, wenn man unter die bestimmten Integrale die einzelne der Differenzialgleichung genügen lassen sollen, und diejenigen ausnimmt, die Cauchy mit dem Namen der singulären belegt. Integrale singuläre sind die genannten jedoch zwischen unendlich nahe nennen und den Grenzen, während zwischen diesen Grenzen die Function unter dem Integralzeichen stetig bleibt. Um dies vor der Hand in dem einfachsten Falle darzuthun wollen wir voraussetzen, dass die den Factor $\alpha - \alpha$ wenn U_0 & U_1 gemeinschaftlich setzen $\alpha - \alpha$ sind in U_1, und nimmt verkommen so wird dadurch die function V uns nur ein einziges Mal in Nennen entfallen, während sie im ersten Theil der Gleichung (3) entfallenen Buchstaben ganz denselben sind und somit für $x = \alpha$ einen endlichen Werth erhält, dass voraussetzungsweise bleibt sich beweisen, dass das bezeichnete Integral:

$$\int_{\alpha-\varepsilon'}^{\alpha+\varepsilon''} e^{\mu x}\, V\, d\mu = \int_{\alpha-\varepsilon'}^{\alpha+\varepsilon''} \frac{C}{U_1}\, e^{\mu x + \int \frac{U_0}{U_1} d\mu}\, d\mu \tag{15}$$

die Eigenschaft besitzt, die Abschnittsbedingung genügen zu leisten, ohne [illegible] gleich Null zu sein. In der Tat geht nun in der Gleichung (2) $U = \alpha - \varepsilon'$ $U'' = \alpha + \varepsilon''$, so verwandelt sich der rechte Teil derselben in eine Reihe von [illegible] derselben Ordnung von ε' bis somit bei dem ersten Abschnitt von ε'' bis ε'', wogegen die Null vorgeschriebene Genauigkeit zu gleicher Zeit ist die besondere Integrale (15) von der Null verschiedene, und gleich der mit einer willkürlichen Konstante multiplizierten Exponentialfunktion $e^{\alpha x}$ wegen man sich [illegible] Entwicklung einer gegebenen Reihe übergnügt. So ist offenbar die Integrale (15) von folgender Form:

$$\int_{\alpha-\varepsilon'}^{\alpha+\varepsilon''} e^{Ux} \frac{\varphi(U)}{U-\alpha}\, dU$$

wo $\varphi(U)$ eine [illegible] bedeutet die für $U=\alpha$ nicht [illegible] verschwindet. Setzen wir für einen neuen Variablen wie durch die Gleichung

$$U = \alpha + \varepsilon v$$

und gehen überdies $\varepsilon' = h_1 \varepsilon$ $\varepsilon'' = h_2 \varepsilon$ so erhalten wir anstatt jener Integrale

$$\int_{-h_1}^{+h_2} e^{(\alpha+\varepsilon v)x} \frac{\varphi(\alpha+\varepsilon v)}{v}\, \varepsilon\, dv$$

Bei dem Übergehen von ε gegen Null nähert sich nun offenbar jeder Teil der Größe

$$\int_{-h_1}^{+h_2} e^{\alpha x} \frac{\varphi(\alpha)}{v}\, dv = e^{\alpha x} \varphi(\alpha) \log\left(\frac{h_2}{h_1}\right)$$

und offenbar die mit einer willkürlichen multiplizierte abgenommene Exponentialfunktion ist.

Setzen aber so die beiden folgenden U_0 und U_1 nicht einen, sondern unendlich gemeinschaftliche Faktoren $U-\alpha$, $U-\alpha'$, $U-\alpha''$, ... $U-\alpha^{(m-1)}$ so werden auch diese Größen die für $U=\alpha$ besonders Integrale geben, und die für die Abschnittsbedingung Genüge leisten, und die sich auch ebenso wieder mit willkürlichen Konstanten multiplizierten Exponentialfunktionen zu gleichen Integralen hinzufügen lassen. Übrigens wenn unter den gegebenen $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots \alpha^{(n-1)}$ [illegible] gegen die Null, so dass sich einige Größen der Gleichheit nähern, so werden auch die besonderen Integrale sämmtlich Genüge leisten, die irgendwie aus diesen untereinander, und zugleich den α hinzu, gebildet Integrale, werden also sein, die der Abschnittsbedingung Genüge leisten, wenn U_0 und U_1 den gemeinschaftlichen Faktor $U-\alpha$ gemeinschaftlich besitzen. Es bleibt aber die [illegible] V den selben $(U-\alpha)^m$ ein Nennen welchen, während der rechte Teil der Gleichung (3) gegen Null sein, also die Abschnittsbedingung Genüge leisten. Nun für $U=\alpha$ nicht unendlich zu werden. Es kann [illegible] Exponentialfunktion gegeben sein, als die Summe einiger mit besonderen Integralen aus der gegebenen Summe [illegible] (8) oder (14) [illegible] wollen aber [illegible] einige Worte was unsere Ansicht. Wir wollen nämlich zeigen, dass [illegible] U_0 und U_1 einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen oder nicht, sobald wir V einen [illegible] von der Form $U-\alpha$ in beliebiger Potenz im Nenner hat, der Abschnittsgleichung stets durch die besonderen Integrale oder durch eine Summe von mehreren solchen Genüge geleistet werden kann. Die Methode dies wahrscheinlicher zu gewinnen, die besonderen Integrale als Übergang [illegible] Integralen der vorgelegten Differenzialgleichung, welche letztere zunächst in [illegible] einer rationalen und ganzen [illegible] gegebenen oder gebrochenen, positiven oder negativen Exponenten versehen sind, kann aber, wenn man will als specielle

[illegible] werden kann.

(5) [illegible]

abgeschätzt werden können und einer Grenzstelle, in eine endliche oder unendliche nach absteigenden Potenzen von ε geordnete Reihe. In der That gehen wir daraus hervor, multiplicirt den Factor $(U-\alpha)^m$ im Nenner unter m von der Hand einen ganzen positiven Zahlenwerth, lassen wir ε nun ins Unendliche abnehmend gegen die bedeutenden $k_1, k_2 \ldots k_{m+1}$ verschwindende Größen, und ε zugleich auch $k_1\varepsilon, k_2\varepsilon, \ldots k_{m+1}\varepsilon$ ins Unendliche abnehmend, so wird jenes Integral eine Summe folgender Formen

$$C_1 \int_{\alpha+k_1\varepsilon}^{\alpha+k_2\varepsilon} e^{Ux} V dU + C_2 \int_{\alpha+k_2\varepsilon}^{\alpha+k_3\varepsilon} e^{Ux} V dU + \cdots + C_m \int_{\alpha+k_m\varepsilon}^{\alpha+k_{m+1}\varepsilon} e^{Ux} V dU$$

wie Integrale der Differenzialgleichung darstellen, welche mindestens mit einer, oft mit mehreren Constanten. Wir wollen der Kürze wegen diese Summen hinschreiben und andeuten durch das Zeichen

$$(16) \qquad \mathfrak{S}\left[C_\mu \int_{\alpha+k_\mu\varepsilon}^{\alpha+k_{\mu+1}\varepsilon} e^{Ux} V dU\right]$$

mittelst der Substitution $e^{Ux} V = \frac{\varphi(U)}{(U-\alpha)^m}$; so verschwindet dem ganzen Zahlenwerth μ nach die Summe

$$(17) \qquad \mathfrak{S}\left[C_\mu \int_{\alpha+k_\mu\varepsilon}^{\alpha+k_{\mu+1}\varepsilon} \frac{\varphi(U)}{(U-\alpha)^m} dU\right]$$

bringen, während uns nur der Theil der Gleichung (3)

$$(19) \qquad e^{Ux + \int \frac{U_1 dU}{U}}$$

von Interesse ist: $\frac{\psi(U)}{(U-\alpha)^k}$ verschwinden wird

in welcher der k genannt k Stücke sind zwischen α und $\alpha+h\varepsilon$ liegen, also $\varphi(U)$ und $\psi(U)$ ganze Functionen, die für $U=\alpha$ nicht unendlich werden. Es fällt in die Augen, daß man

(20)

$$\mathfrak{S}\left[C_\mu \left\{\frac{\psi(U)}{(U-\alpha)^k}\right\}_{\alpha+k_\mu\varepsilon}^{\alpha+k_{\mu+1}\varepsilon}\right] = 0$$

wird, während zugleich die Summen (16) einen endlichen und von der Null verschiedenen Werth bekommt, der wenigstens eine oft aber auch mehrere willkürliche Constanten in sich schließt. Führen wir zu diesem Zwecke eine neue Variable ein, mittelst der Substitution:

$$U = \alpha + \varepsilon v$$

und entwickeln die Functionen φ und ψ mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes, so daß wir erhalten:

$$\frac{\varphi(U)}{(U-\alpha)^m} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varepsilon^m v^m} + \frac{\varphi'(\alpha)}{\varepsilon^{m-1} v^{m-1}} + \frac{\varphi''(\alpha)}{2.\varepsilon^{m-2} v^{m-2}} \qquad (21)$$

$$+ \frac{\varphi'''(\alpha)}{2.3.\varepsilon^{m-3} v^{m-3}} + \cdots + \frac{\varphi^{(m-1)}(\alpha)}{2.3.\ldots(m-1).\varepsilon v} + \frac{\varphi^{(m)}(\alpha+\theta\varepsilon v)}{2.3.\ldots.m}.$$

$$\frac{\psi(U)}{(U-\alpha)^k} = \frac{\psi(\alpha)}{\varepsilon^k v^k} + \frac{\psi'(\alpha)}{\varepsilon^{k-1} v^{k-1}} + \frac{\psi''(\alpha)}{2\varepsilon^{k-2} v^{k-2}} + \frac{\psi'''(\alpha)}{2.3\,\varepsilon^{k-3} v^{k-3}} + \qquad (22)$$

$$+ \cdots + \frac{\psi^{(k-1)}(\alpha)}{2.3.\ldots.(k-1)\varepsilon v} + \frac{\psi^{(k)}(\alpha+\theta\varepsilon v)}{2.3.\ldots.k}$$

sind setzen die gefundenen Werthe in die Formeln (18) und (20). Die daselbst vorhandenen Summen werden sich dann in so viele Theile zerlegen lassen, als in den zweiten Theilen der Gleichung (21) und (22) Glieder vorhanden sind, und jeder dieser Theile wird wieder eine Summe sein. Es kann ferner in den

jedem ein von μ unabhängiger Factor gesondert und
von der Summenzeichen gestellt werden, da die Summi-
rung nur nach μ zu geschehen hat. Führt man diese aus,
so gelangt man zu folgenden Ausdrücken:

$$y = \frac{\varphi(\alpha)}{\varepsilon^{m-1}} \sum_0^n \left[C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v^m} \right] + \frac{\varphi'(\alpha)}{\varepsilon^{m-2}} \sum_0^m \left[C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v^{m-1}} \right] +$$

$$\frac{\varphi''(\alpha)}{2.\varepsilon^{m-3}} \sum_0^m \left[C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v^{m-2}} \right] + \cdots + \frac{\varphi^{(m-1)}(\alpha)}{2.3.\ldots.(m-1)} \sum_0^m \left[C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v} \right] +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2.3.\ldots.m} \sum_0^m \left[C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \varphi(\alpha + b\varepsilon v)\, dv \right] \qquad (23)$$

$$0 = \frac{\psi(\alpha)}{\varepsilon^k} \sum_0^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^k} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] + \frac{\psi'(\alpha)}{\varepsilon^{k-1}} \sum_0^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^{k-1}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] +$$

$$\frac{\psi''(\alpha)}{2.\varepsilon^{k-2}} \sum_0^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^{k-2}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] + \cdots + \frac{\psi^{(k-1)}(\alpha)}{2.3.\ldots.(k-1)\varepsilon} \sum_0^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2.3.\ldots.k} \sum_0^m \left[\left\{ C_\mu \psi^{(k)}(\alpha + \theta\varepsilon v) \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] \qquad (24)$$

Man überzeugt sich leicht auf den ersten Anblick, daß in den
letzten beiden Gleichungen die Ergänzungsglieder bei den einand.
linken Abweichungen von ε gegen die Null convergiren, und
daß die zweiten derselben durch solche Wahl der Constanten
$C_1\ C_2 \ldots C_m$ genügt gemacht werden, daß folgende Systeme

von k Gleichungen zu erfüllen.

$$\sum_0^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^k} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \sum_0^m \left[\frac{C_\mu}{h_{\mu+1}^k} - \frac{C_\mu}{h_\mu^k} \right] = 0$$

$$\sum_0^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^{k-1}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \sum_0^m \left[\frac{C_\mu}{h_{\mu+1}^{k-1}} - \frac{C_\mu}{h_\mu^{k-1}} \right] = 0$$

$$\sum_0^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^{k-2}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \sum_0^m \left[\frac{C_\mu}{h_{\mu+1}^{k-2}} - \frac{C_\mu}{h_\mu^{k-2}} \right] = 0 \qquad (25)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_0^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \sum_0^m \left[\frac{C_\mu}{h_{\mu+1}} - \frac{C_\mu}{h_\mu} \right] = 0$$

Zudem hat man noch:

$$\int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v^m} = -\frac{1}{m-1} \left\{ \frac{1}{v^{m-1}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} = \frac{1}{(m-1)h_\mu^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)h_{\mu+1}^{m-1}}$$

$$\int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v^{m-1}} = -\frac{1}{m-2} \left\{ \frac{1}{v^{m-2}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} = \frac{1}{(m-2)h_\mu^{m-2}} - \frac{1}{(m-2)h_{\mu+1}^{m-2}} \qquad (26)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v} = \left\{ \log v \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} = \log \frac{h_{\mu+1}}{h_\mu}$$

und es läßt sich dann zu Folge der Gleichung (23) auch so schreiben:

84

$$y = -\frac{\varphi(\alpha)}{(m-1)\varepsilon^{m-1}} \int_1^m \left[\left\{ \frac{c_\mu}{v^{m-1}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] - \frac{\varphi'(\alpha)}{(m-2)\varepsilon^{m-2}} \int_1^m \left[\left\{ \frac{c_\mu}{v^{m-2}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] -$$

$$- \frac{\varphi''(\alpha)}{2(m-3)\varepsilon^{m-3}} \int_1^m \left[\left\{ \frac{c_\mu}{v^{m-3}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] - \cdots - \frac{\varphi^{(m-2)}(\alpha)}{2.3\ldots(m-2)\varepsilon} \int_1^m \left[\left\{ \frac{c_\mu}{v} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right]$$

$$+ \frac{\varphi^{(m-1)}(\alpha)}{2.3\ldots(m-1)} \int_1^m \left[\left\{ c_\mu \log v \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] \qquad (27)$$

einige der hier vorkommenden Glieder sind namentlich in der Regel k an der Zahl verschwinden in Folge der Gleichungen (25), welche zwischen den m Constanten $C_0 \ldots C_{m-1}$ k relationen festsetzen, und somit k derselben bestimmen. Zur Bestimmung der übrigen $= m-k$ auszudrücken gestatten. Diese letzteren sind nun als ganz willkührliche Constanten zu unserer Disposition, und wir können darüber so verfügen, daß:

$$\int_1^m \left[\left\{ \frac{c_\mu}{v^{m-1}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \int_1^m \left[\frac{c_\mu}{h_{\mu+1}^{m-1}} - \frac{c_\mu}{h_\mu^{m-1}} \right] = -B_1(m-1)\varepsilon^{m-1}$$

$$\int_1^m \left[\left\{ \frac{c_\mu}{v^{m-2}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \int_1^m \left[\frac{c_\mu}{h_{\mu+1}^{m-2}} - \frac{c_\mu}{h_\mu^{m-2}} \right] = -B_2(m-2)\varepsilon^{m-2}$$

(28)

$$\int_1^m \left[\left\{ \frac{c_\mu}{v^{k+1}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \int_1^m \left[\frac{c_\mu}{h_{\mu+1}^{k+1}} - \frac{c_\mu}{h_\mu^{k+1}} \right] = -B_{m-k-1}^{*}(k+1)\varepsilon^{k+1}$$

$$\int_1^m \left[\left\{ c_\mu \log v \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \int_1^m \left[c_\mu \log h_{\mu+1} - c_\mu \log h_\mu \right] = -B_{m-k}^{\dagger}$$

* $= 2.3\ldots(k+1) B_{m-k-1} \varepsilon^{k+1}$

† $2.3\ldots(m-1) B_{m-k}$

unter $B_1\ B_2 \cdots B_{m-k}$ eben auch ganz willkührliche Constanten

verstanden. Daß damit unsere partikuläre Integral der Differentialgleichung erfüllt nun offenbar folgende Form:

$$y = B_1\varphi(\alpha) + B_1\varphi'(\alpha) + B_2\varphi''(\alpha) + \ldots + B_{m-k-1}\varphi^{(m-k-2)}(\alpha) + B_{m-k}\varphi^{(m-1)}(\alpha) \qquad (29)$$

Um über den Sinn dieses Ausdrucks näheren Aufschluß zu erhalten, bemerken wir, daß sowohl $\varphi(u)$ als auch $\psi(u)$ die Exponentialle e^{ux} als Factor besitzen, also von der Form sind: $\varphi(u) = e^{ux} M$; $\psi(u) = e^{ux} N$ (30)

unter M und N blos Functionen von u vorhanden, die weiter kein x in sich enthalten. Die successiven Differentialquotienten dieser Ausdrücke wird man erhalten, indem man von einer bekannten allgemeinen Formel der Differential-Rechnung Gebrauch macht, nämlich:

$$\frac{\partial^n PQ}{\partial u^n} = Q\frac{\partial^n P}{\partial u^n} + n\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial^{n-1} P}{\partial u^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^{n-2} P}{\partial u^{n-2}} + \ldots \qquad (31)$$

und aus welcher man e^{ux} anstatt P, M anstatt Q setzend in Form einer nach absteigenden Potenzen von x geordneten, und mit der Exponentialle e^{ux} multiplicirten Reihe, ganz allgemein den Ausdruck erhält:

$$\varphi^{(r)}(u) = e^{ux}\left[Mx^r + r\frac{\partial M}{\partial u}x^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}x^{r-2} + \ldots \right] \qquad (32)$$

in welcher die eingeklammerte Reihe eben, weil dem bisherigen Fortschreiten nach, die Differenzirung in unserer Formel fortgesetzt ist, r eine ganze Zahl bedeutet, endlich, bei den $r+1^{ten}$ Gliede abbrechende Reihe ist. Hier muß man sich noch $u = \alpha$ gesetzt, r der Reihe nach in $0, 1, 2, \ldots (m-k-2)$, und $(m-1)$ verwandelt, und die so gewonnenen

Ausdrücken mit den Constanten $B_0, B_1 \ldots B_{m-k}$ multiplicirt denken, um die Bestandtheile der Function von y zu erhalten, welche letzteren sodann in folgender Form erscheinen wird:

$$(33)\quad y = e^{\alpha x}\left[D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots + D_{m-k-1} x^{m-k-1}\right] + B_{m-k}\, e^{\alpha x}\left[M x^{m-1} + (m-1) M' x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} M'' x^{m-3} + \ldots\right]$$

$D_0 \ldots D_{m-k-1}$ bestehen folgende Werthe; aus welchen sowohl, dass sie sämtlich ganz willkührliche Constanten sind, und wo später $M\, M'\, M'' \ldots$ bezeichnet die Werthe verstanden werden, die die Function M und ihre successiven Differential-quotienten erhalten, wenn in derselben $U = \alpha$ gesetzt wird.

$$(34)\quad \begin{aligned} D_0 &= M B_0 + M' B_1 + M'' B_2 + M''' B_3 + \ldots + M^{(m-k-1)} B_{m-k-1} \\ D_1 &= M B_1 + 2 M' B_2 + 3 M'' B_3 + \ldots + (m-k-1) M^{(m-k-2)} B_{m-k-1} \\ D_2 &= M B_2 + 3 M' B_3 + 6 M'' B_4 + \ldots + \frac{(m-k-1)(m-k-2)}{2} M^{(m-k-3)} B_{m-k-1} \\ D_3 &= M B_3 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{m-k-1} &= M B_{m-k-1} \end{aligned}$$

Es ist hiebei nie der Fall ausser Acht gelassen worden, dass zwar $\psi(\alpha), \psi'(\alpha), \psi''(\alpha), \ldots \psi^{(k-1)}(\alpha)$ sämmtlich verschwinden können, dass jedoch $\psi^{(k)}(\alpha)$ nicht ebenfalls verschwinden darf, weil sonst k nicht der kleinste Exponent wäre, für welchen $\psi^{(k)}(\alpha)$ einen von Null verschiedenen Werth annimmt. Es sind dies Fälle, welche unter die Gruppen singulärer Lösungen gehören.

Wie man sieht, besteht das eben gewonnene Resultat für y aus zwei Theilen, von denen jeder als Product erscheint aus einer Constanten in eine ganze algebraische Function von x, und mit dem Unterschiede, dass der erste $m-k-1$ willkührliche Constanten in sich schliesst, während der zweite nur eine einzige enthält; zugleich ist dies kaum einzusehen, dass der erste nur denjenigen Coefficienten $U-\alpha$ enthalten, die $m-k-1$ an der Zahl, den Polynomen U_0 und U_1 gemeinschaftlich sind, so dass nun sofort, wie nun dieses gemeinschaftliche Coefficienten gewesen wird, diesen ersten Theil ohne weitere Rechnung sogleich hinschreiben kann. Auf nämliche Weise gelangt man zur Ermittlung des zweiten Theiles und ermöglicht die Darstellung desselben in Form eines Differentialquotienten nach der Beziehung der Constanten m, als sich bei der Entwicklung des Bruches $\frac{U_0}{U_1}$ in fractionale Brüche absolutes ergiebt.

Hier ist noch nicht zu vergessen, dass die oben vorgenommene Analysis einige Voraussetzungen zu Grunde liegen, nämlich: 1.) dass die Function unter dem Integralzeichen:

$$e^{Ux}\varphi$$

gebraucht werden darf und das Integral:

$$\frac{\varphi(U)}{(U-\alpha)^m} = \frac{e^{Ux}M}{(U-\alpha)^m}$$

wo $\varphi(U)$ eine Function bedeutet, die für $U=\alpha$ nicht unendlich wird. Dieß setzt offenbar voraus, dass in der genommen die in Frage stehende Function kein Glied enthalte, welches $U-\alpha$, wenn es mit dem Factor $U-\alpha$, wodurch dieses Glied gleichfalls wird, wenn man Abkürzung willen das ihm folgende aus U_0 und U_1 gemeinschaftliche Factor $U-\alpha$ nun ein einziges solches in U_1 übrig bleibt. Sollten aber mehrere übrig bleiben, so wollen wir einen solchen Fall ebenfalls beizufügen, wo die Gleichung $U_1=0$ mehrere gleiche Wurzeln α enthält, ein Fall, der ebenfalls zum Theil kommen wird.

Die zweite in dieser Rechnung stillschweigend mitgemachte Voraussetzung ist, dass der Exponent m eine ganze positive Zahl sei, eine Voraussetzung, die

sich in der folgenden Zeile realisiren wird. Ebenso einfach aber ist die Gültigkeit der für y gefundenen Substitute (33) dennoch nicht an die Erfüllung dieser Bedingung gebunden. Und so fasst der selbe Sand, die Differentialgleichung Genüge zu leisten, ob jetzt m eine ganze positive oder nicht. Von dem ersten Theile desselben, welcher das Polynomen U_0 und U_1 gemeinschaftliche Factor $U-\alpha$ sein Dasein verdankt, ist nicht mehr die ganzen Derivirten, die uns zu der Gleichung (14) führte, unmittelbar klar, und überdieß etwas viertes Substitution fast kaum nöthig. In der That, setzen wir in unserer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung $e^{Ux}u$ anstatt y, so geht sie über in:

$$U_0 + U_1\alpha = 0 \qquad (35).$$

Enthalten nun die Polynomen U_0 und U_1 den gemeinschaftlichen Factor $(U-\alpha)^\sigma$, so wird diese Gleichung Genüge geleistet werden, wenn nun $U=\alpha$ setzt, und somit ist das Substitut:

$$Ce^{\alpha x}$$

ein particuläres Integral.

Allein muß jetzo unser Ausdruck von der Form:

$$(36) \qquad B x^r e^{\alpha x},$$

wenn r eine ganze Zahl, beziehungsweise die kleinste ist welche, wird dieselbe eigentlich darstellen; denn setzen wir:

$$(37) \qquad y = x^r e^{Ux}$$

in die Differentialgleichung, und nehmen Rücksicht, daß:

$$\frac{dy}{dx} = e^{Ux}\left[U x^r + r x^{r-1}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{Ux}\left[U^2 x^r + 2r U x^{r-1} + r(r-1) x^{r-2}\right]$$

. . . . . .

und allgemein:

$$(38) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = e^{Ux}\left[U^m x^r + m_1 U^{m-1} x^{r-1} + \frac{m(m-1)}{2} U^{m-2} r(r-1) x^{r-2} + \ldots + r(r-1)\ldots(r-m+1) x^{r-m}\right]$$

ist, so zerfallen wir:

$$(39) \qquad x^r\left[U_0 + U_1 x\right] + r x^{r-1}\left[\frac{dU_0}{dU} + x\frac{dU_1}{dU}\right] + \frac{r(r-1)}{2} x^{r-2}\left[\frac{d^2U_0}{dU^2} + x\frac{d^2U_1}{dU^2}\right] + \ldots + \frac{d^r U_0}{dU^r} + x\frac{d^r U_1}{dU^r} = 0$$

eine Gleichung, die für $U = \alpha$ identisch wird, weil

die Voraussetzung nach den Polynomen U_0 und U_1, die Größe $U - \alpha$, einmal zugelassen und $r < \sigma$ ist.

Es ist somit bewiesen, daß der Ausdruck (36) für solche ganze Werthe von r, die kleiner sind als σ, die Differentialgleichung genügen lassen und weil man dem Reihe nach $r = 0, 1, 2, \ldots, \sigma-1$ setzen und gleichsam die ursprünglichen Constanten B in $B_0, B_1 \ldots, B_{\sigma-1}$ verwandeln, so muß die Summe alles so hervorgebrachten, jedem Werthe nehmen kann, so zerfällt unmittelbar, daß, wenn U_0 und U_1 B gemeinschaftliche Factoren $U - \alpha$, wie die Form, besitzen;

$$y = e^{\alpha x}\left[B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{\sigma-1} x^{\sigma-1}\right]$$

ein ganzrationales Integral der Differentialgleichung sei; d. h. der erste Theil des Ausdruckes (36) stellt somit die Differentialgleichung genügen zu lassen. Allein muß der zweite Theil desselben wird nicht aufhören die Differentialgleichung zu erfüllen, wie. wohl für ein gebrochenes oder negatives m

des Multiplicators des Exponentialtheils ein endliches Polynom zu sein aufhört und in eine unendliche nach absteigenden Potenzen von x geordnete Reihe übergeht, deren Form Analog mit dem Übergange nun sich klar durch folgende Übersehung: Es ist keinem Zweifel unterworfen, dass dieser zweite Theil von y d.i. der Ausdruck:

$$B_{m-k}\, e^{\alpha x}\left[M x^{m-1} + (m-1)M' x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} M'' x^{m-3} + \dots\right] \tag{40}$$

~~die Form~~ ein particuläres Integral sei, wenn m einen beliebig gewählten, noch ganz unbestimmt gelassenen ganzen Zahlwerth bedeutet und genau dieselbe Form, ob man sich m als unbestimmt ganze oder unbestimmt gebrochene, ja negative oder auch imaginäre Zahl vorstellt, weil in derselben nichts aufgehoben ist, wodurch die Veränderung von m mit Vollständigkeit auf ganze Zahlen beschränkt würde. Lässt man sich daher diesen Ausdruck anstatt y in die Gleichung substituirt, diese Substitution aber gehörig ausgeführt, nämlich in der

einen Voraussetzung, nämlich, dass m einen unbestimmt ganzen Zahl sei; der andere Theil in der andern aufgegangen, so werden sich auf diese beiden Substitutionen und damit auf sämmtliche Substitutionen offenbar in gar nichts von einander unterscheiden, und man wird demnach Gelegenheit finden die Bedingung, dass m eine ganze Zahl sei, in Rechnung zu setzen, somit können ~~wir~~ auf die Resultate der beiden Substitutionen nun dieselben sein, d.i. der Ausdruck (40), der für ganze m Genüge leistet, wird für beliebige m beobachtet die Differentialgleichung zu erfüllen; und daraus, dass dieser aber vorgelegene Analysis nun gültig ist für ganze und positive m folgt nun, dass die dasselbe zu Grunde gelegte Übergangs-Form nicht besondere Integralwerth für andere als ganze Werthe von m ist, insbesondere unter der Gestalt (40) vorkommt, particulären Integral wieder gar gebar nicht vorhanden. Da sich aber der Ausdruck (40) für ein beliebiges m auf die Kürzeste und so schreiben

löst:

$$(41)\qquad \mathfrak{B}_{m-k}\cdot\frac{d^{m-1}}{dU^{m-1}}\left[e^{Ux}M\right]$$

wo in die Differentiation nach U, x gesetzt, so bald und sie eine neue Form annehmen, indem sowohl die ganzen Functionen von einander Differentialgleichungen nach einem Gesetze, nämlich die einer Differentials mit beliebigen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen, ja gelegentlich irrationalen und imaginären Exponenten; eine Haltung von Laurent'schen, die bisher wenig in die Analysis gebraucht, dann erst in neuerer Zeit von Liouville im Journal de l'école polytechnique, tome XIII. zur Auflösung eines speciellen sehr interessanten Problems angewendet wurde, bei der Integration der Differentialgleichungen aber eine nicht unbedeutende Rolle zu spielen bestimmt ist. Das Princip, dass sich Laurent, um zu unmittelbaren Integrationen brauchbare zu erhalten, in eine nach absteigenden Potenzen von x geordnete unendliche Reihe, d.f. in die Laurent (40) entwickelt werden muss,

während die (41) als einen symbolischen, oder ganzlich unbrauchbaren Ausdruck absah, sah die Verwandtschaft derselben mit dem Satz der Mechanik oder mathematischen Physik keineswegs seinen Sinn. Auf diesem Satz beruhet wesentlich y in der Regel die sehr kleine Verschiedenheit (und die Richtung) zweier in Schwingungen von gegebener Amplitude begriffenen materiellen Theilchen, oder über die Entfernung derselben von der Gleichgewichtslage oder bei andern gelegentlichen die Zeit, in der Anfang der Bewegung an gerechnet ist. Darum die für y gewonnene ganzrationale Form, d.f. die unendliche Reihe (40) schon darum nicht recht convergirend werden wird, je grösser man x nimmt, so verfallen wir mit derselben in Schwierigkeiten mit der grössten Genauigkeit, je weiter die schwingenden Theilchen vom Orte der anfänglichen Bewegung entfernt ist, oder in andern Worten, je weiter man in die Zeit fortschreitet. Dies ist aber gerade aufzeigen, wenn man bei der Auflösung

äußerliches Problem vorliegt, indem in der vorliegenden Aufgabe nur die Tangentenstelle nicht in der Nähe der Grenze des Existenzbereiches der sich bewegenden Punkte gar noch nicht für Annäherung der Differentialgleichungen brauchbar ist, welche bezüglich nun schon mit Recht angezogen hat, daß man die kleinen endlichen Änderungen noch als sehr kleine unendlich kleine Größen behandeln, also in gewissen Entfernungen von der Tangentenstelle wirklich verschwinden. Warum pflegt man [minus] nun [minus] auszudrücken mit einer Wahrscheinlichkeit gegen gewisse Tatsachen, als da sind: Farbenblindheit, Mozartsinn, Null und Nichtnichts, etc., ohne Rücksicht oder Berücksichtigung, in den meisten Fällen notwendig bleibt. Demgemäß befindet sich in einer Lage die Form und bestimmten Integrale gegen der bekannten, wenn Differenzialgleichungen der gegebenen Form

vorgelegen, wirklich vorkam die einer bestimmten Integralgruppe, gemäß der einer Differentialgleichung deren Tangente einer allgemeinen Lage ist, die gestützt oder ungestützt, gerade oder gebrochen, je nach Umstand und einzelnen gegebenen gruppen durch einen Punkt M, die in der Differentialgleichung nicht vorkommt, und sofort mit selbigen Differentialgleichungen eingeht ein empfundenes Recht gegeben wird, und nicht vorkommt die einer Gruppe Integrale und einer Tangente in einer ganzen ausgezeichneten Funktion der vorhandenen Integrale verlassen. Und diejenige Analysis die für und für Entwicklung der ganz besten Formeln Integrale gegeben hat, findet und zeichnet für vorhandene diejenige der in ersten Fragesatz gegebenen Integralgleichungen welche diejenigen Fälle, in welchen dieselben eine allgemeine, nicht mit der geringsten Begriff willkürlichen Constanten gegebene Integrale, die sonst, diese und den letzten Integralen gegebenen gegebenen Integralgleichungen welche wird um in folgenden bestehen Mannigfaltigkeit in der gegebenen Differentialgleichung die Größen

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

bezüglich durch die Folgenden

$$1,\ u,\ u^2 \ldots u^n$$

und bezeichne das Resultat mit

(42) $$N_0 + N_1 x,$$

wenn ferner der Rest des Integrales

$$\int_{u_1}^{u_0} du,$$

und setze die Integration des Bruches in gebrochene, derart, daß die beiden Polynome N_0 und N_1 gemeinschaftliche Faktoren von der Form $u-\alpha$, welche ebenfalls jedesmal angibt, wie oft der zugehörige Faktor in den gebrochenen Partialbrüche des Nullgliedes enthalten ist, nicht mehr enthalten, so kann man N_0 und N_1 als ganze Faktoren voraussetzen, da diese Voraussetzung die Allgemeinheit der folgenden Integrale:

(43) $$C \qquad C e^{\alpha x}.$$

Besitzt aber jeder gemeinschaftliche Faktor in ~~jedem~~ Polynomen mindestens einmal, so besteht sich dieselbe Form in, willkürliche Constante s von der Zahl, und fallende ganze Exponenten:

(44) $$e^{\alpha x}(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{s-1} x^{s-1});$$

und die ersteren setzen jedesmal so viele ganze Constante in der Gleichung ganzer Function, als die Polynome N_0 und N_1 gemeinschaftliche Faktoren von der Form $u-\alpha$ besitzen.

Setzen wir endlich unter Gestalt ~~eines~~ eines bestimmten Integrales

$$\int_{u_1}^{u''} e^{ux} V du,$$

~~und setzen~~ setzen wir dem Ausdrucke V jene Gestalt, welche dem Nullgliede entspricht, ~~eine Function~~

$$V = \frac{C}{u_1} e^{\int \frac{N_0}{N_1} du}$$

(45) (46)

x, u' und u'' seien Wurzeln der Gleichung

$$e^{ux + \int \frac{N_0}{N_1} du} = 0.$$

(47)

Letztere entspricht nun gedenkt unter folgender Form (82, 79) wie in Aufgabe dieß Integral ~~entwickelt~~ entwickelt wurde:

$$\frac{(u-\alpha_1)^{A_1}(u-\alpha_2)^{A_2}\ldots\ldots}{(u-\beta_1)^{B_1}(u-\beta_2)^{B_2}\ldots\ldots} C^{ux + N + \frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}} + \ldots} = 0,$$

(48)

und wird erfüllt, wenn man die Werthe:

$$u = \gamma_1, \quad u = \alpha_2 \ldots$$

gesetzt und jenjenigen die der Gleichung

$$N = -\infty$$

genügen. Diese sind nun also für u' und u'' nehmen können und so wird jenes Integral verschiedene Werthe erhalten, die jedesmal die Integrale verschiedene, aber x gleichzeitig die Integrale beständig endlich machen werden, dass die Function unter dem Integralzeichen innerhalb der begrenzten Grenzen durch ~~den~~ Unendlich nicht geht, und Verschwinden der ersten

...ware bisst eine ganzen und reellen Zahlen, und z. B. gleich vorstand wo gezeigt wird, und β_1, unter Zeichen zwischen α_1 und α_2 fällt, bzw. innerhalb der Grenzen α_1 und α_2, genommen und bestimmte Integrale.

Ein Fall dieser nicht ganz gewöhnlichen Reihen, ~~der~~ ~~der~~ ~~und~~ ~~differentialen mit~~ ~~ebenfalls~~ ~~Typen~~ ~~tion~~, und zugleich der beste Gegenstand gegen den letzten, ~~wichtigen~~ Abschnitt, wird uns in ~~der~~ ~~der~~ ~~und~~ differentialen ~~und~~ mit ebenfalls Exponenten und die Form geben. Um diese zu erhalten entwickeln wir die Form (46) und bekommen ~~ebenfalls~~:

$$V = \frac{C}{n_1} e^{\int_{n_1}^{n_2} dn} = \frac{(n-\alpha)^{\alpha_1}(n-\alpha_2)^{\alpha_2}\cdots}{(n-\beta_1)^{\beta_1}(n-\beta_2)^{\beta_2}\cdots} e^{N+\frac{D}{(n-\gamma)^{m-1}}+\cdots} \tag{49}$$

wo $\alpha_1 = \alpha_1 - 1$, $\alpha_2 = \alpha_2 - 1 \ldots$ $\beta_1 = \beta_1 + 1$, $\beta_2 = \beta_2 + 1 \ldots$ sein wird, wenn nicht unter $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \beta_1, \beta_2$ wiederholt gleichwertige Wurzeln der Gleichung $N_1 = 0$ sind, in welchen Falle $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \beta_1, \beta_2$ andere Werte annehmen, und zugleich die multiplizierenden Faktoren $n-\alpha_1$, $n-\alpha_2 \ldots n-\beta_1$, $n-\beta_2 \ldots$ all denen zum Beispiel die Exponenten der Exponentialen gleichwertig ~~sein~~ werden. Diesen letzten Umstand ist vorläufig zu beachten; findet derselbe nicht statt, so können diese Faktoren mit Exponenten als denen zur nächsten, so erhalten wir, den Wurzeln $\beta_1, \beta_2 \ldots$ entsprechend, eine Reihe von gewöhnlichen Integralen.

$$\int_{\beta_1} \frac{d^{b_1-1}}{dn^{b_1-1}}\left[e^{nx} M_1\right], \int_{\beta_2} \frac{d^{b_2-1}}{dn^{b_2-1}}\left[e^{nx} M_2\right] \ldots \tag{50}$$

in ~~der~~ ~~der~~ ~~und~~ differentialen ~~und~~ mit Exponenten, wo gilt:

$$M_1 = \frac{(n-\alpha_1)^{\alpha_1}(n-\alpha_2)^{\alpha_2}\cdots}{(n-\beta_2)^{\beta_2}\cdots} e^{N+\frac{D}{(n-\gamma)^{m-1}}+\cdots}$$

$$M_2 = \frac{(n-\alpha_1)^{\alpha_1}(n-\alpha_2)^{\alpha_2}\cdots}{(n-\beta_1)^{\beta_1}\cdots} e^{N+\frac{D}{(n-\gamma)^{m-1}}+\cdots} \tag{51}$$

. . . . . .

und wenn die Differentiation in ersten der Ausdrücke (50) $n=\beta_1$, im zweiten $n=\beta_2$ gesetzt werden muß. Diese letzte Substitution wollen wir lediglich durch ein, wenn nötig, ~~den~~ ~~Ausdruck~~ ~~mit~~ Klammern umgebenen Ausdruck mit Nebenzeichen ungehängten β_1 oder β_2 andeuten, so:

$$\left\{\int \frac{d^{b_1-1}}{dn^{b_1-1}}\left[e^{nx} M_1\right]\right\}_{\beta_1}, \left\{\int \frac{d^{b_2-1}}{dn^{b_2-1}}\left[e^{nx} M_2\right]\right\}_{\beta_2}. \tag{52}$$

Ähnliche partikuläre Reihen können wir auch für die Exponenten $q_1, q_2 \ldots$ erhalten, wenn auch die ihnen entsprechenden Faktoren, die ebenerhaltenen Nebenwurzeln, die obenerhaltenen Nebenwurzeln wegen, nicht gegeben sollten, nämlich:

$$\left\{\int_1 \frac{d^{-n_1-1}}{dn^{-n_1-1}}\left[e^{nx} P_1\right]\right\}_{q_1}, \left\{\int_2 \frac{d^{-n_2-1}}{dn^{-n_2-1}}\left[e^{nx} P_2\right]\right\}_{q_2}. \tag{53}$$

wobei

$$P_1 = \frac{(n-\alpha_2)^{\alpha_2}\cdots}{(n-\beta_1)^{\beta_1}(n-\beta_2)^{\beta_2}\cdots} e^{N+\frac{D}{(n-\gamma)^{m-1}}+\cdots}$$

$$P_2 = \frac{(n-\alpha_1)^{\alpha_1}\cdots}{(n-\beta_1)^{\beta_1}(n-\beta_2)^{\beta_2}\cdots} e^{N+\frac{D}{(n-\gamma)^{m-1}}+\cdots}$$

. . . . . sind.

schließlich wären noch die Null gleichen Werthe der Gleichung $U_1 = 0$ zu untersuchen, d. h. zu ermitteln, ob $U-y$ für diese Werthe unendlich wird. Abgesehen allen gemeinschaftlichen Faktor, kann $U-y$ nur den Factoren U_0 und U_1, wenn solche wirklich vorhanden sein sollten in U_1 nur $(U-y)^m$ als Faktor so gibt dasselbe Veranlassung zu einer Reihe von partikulären mit den Nennern $(U-y)', \ldots (U-y)$ deren Faktoren die ganzen Reihen sind mit den Nennern

$$(U-y)^{m-1} \quad (U-y)^{m-2} \ldots$$

im Allgemeinen vorhanden sein werden. Hier werden wir nun den zweifachen partikulären Faktoren, die dem Werthe y entsprechen, und die m an der Zahl vorhanden sein müssen, wenn sich nicht ein Abschnitt von einem der einfachen partikulären Werthen vorhanden, substituirt zu werden. Nun neue Variable mittelst der Beziehung

$$U - y = \frac{1}{v}$$

einführen, wodurch die Gleichung (48) übergeht in

$$\frac{(v(y-\alpha_1)+1)^{A_1}(v(y-\alpha_2)+1)^{A_2}\ldots v^{B_1+B_2+\ldots}}{(v(y-\beta_1)+1)^{B_1}(v(y-\beta_2)+1)^{B_2}\ldots v^{A_1+A_2+\ldots}} e^{\frac{vv+1}{v}x+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}v^{m-1}+\mathfrak{C}v^{m-2}+\ldots} = 0 \qquad (54.)$$

und wegen v nach ist Genüge leistende Werthe zu suchen, welche hinzeigen, die die Gleichung $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B}v^{m-1} = -\infty$$

erfüllen, zweitens noch überdies hinzeigen, die die unendlich kleinen Werthe von v, welche $\frac{x}{v}$ unendlich

und negativ machen. Hinzu gibt unter Umgehen m an der Zahl, die sich so werden schreiben lassen:

$$\pm\varepsilon, \mu_1\infty, \mu_2\infty \ldots \mu_{m-1}\infty$$

und zu welchen man wie zuvor einen der Gleichung

$$(v(y-\alpha_1)+1)^{A_1}(v(y-\alpha_2)+1)^{A_2}\ldots = 0$$

genügen bestimmten Werth v hinzufügen wird. Um die Combination einer Größen nun wird man Vorsicht anwenden müssen, damit zu gemeinsame bei welchen die partiellen unter gemeinsamen Faktoren $y-\infty$ einen Faktor enthalten, nicht gewählt werden, und man wird nur darauf zu reflectiren haben, und man wird nur auf zu reflectiren haben, ob nun unter diejenigen einer der Gleichung (54) gehörigen bestimmten Werth $v = g$ angehört, der nicht genügen bestimmten Faktor als partiellen Werth mit Hülfe innerhalb Größen g und μ_1 oder g und μ_2 bis g und μ_p und zugleich die Constanten der Substitution, die als Multiplicatoren einen Faktor enthalten, in die Bedingungsgleichung

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_p = 0$$

Endlich. Muss nun von diesen Lösungen der gefundenen Gattung, so ist nun ~~die Anzahl~~ muss die Anzahl $\mathfrak{A}$ und einzigen partikulären Faktoren zu ermitteln, die bei gegebenen Gelegenheiten um zweckmässigsten in Anwendung kommende Methode der Reduction der willkürlichen Constanten, wird dann diesen einen nach bestehenden $\mathfrak{A}$ partikulären Werth und zwar $\mathfrak{A}$ Faktoren

nimm die gewöhnliche Lösung der ersten Ordnung einen Anstand[H] bringen. Es ist nur noch übrig die Klippunkte einzelner zweifelhafter Gattungen in einigen und namentlich diejenigen Exponenten aufzusuchen, die in ersten Formeln der Untersuchung übergangen worden sind.

Wir fangen an bei der Differentialgleichung

(55) $$x\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}\pm b^2xy=0$$

deren allgemeines Integral für gewisse von 0 verschiedene Werthe von a gefunden worden ist, so daß uns nur noch die Fälle zu betrachten übrig bleiben, wo a Null oder negativ.

Im ersten dieser Fälle verwandelt sich (55) in die einfache Gleichung mit constanten Coefficienten

$$\frac{d^2y}{dx^2}\pm b^2y=0$$

und kann auf die für die ~~Form~~ Gleichung bekannten Methoden gleich integrirt werden, im zweiten Falle, den wir sofort unmittelbar nehmen wollen, da wir $-a$ gesetzt a setzen können also in die Gleichung

(56) $$x\frac{d^2y}{dx^2}-a\frac{dy}{dx}\pm b^2xy=0$$

(57) ~~Diese~~ findet ~~sich~~ ist $V=\frac{1}{(U^2\pm b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}$

und wir wollen eben den Fall untersuchen, wo von den beiden Zeichen $\pm$ das untere gilt und in welchem

der Werth von V so geschrieben werden kann:

~~$V=\frac{1}{(U+b)(U-b)^{\frac{a}{2}+1}}$~~

$$V=\frac{1}{(U+b)^{\frac{a}{2}+1}(U-b)^{\frac{a}{2}+1}} \qquad (58)$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung kann dargestellt werden durch unter folgender Form

$$y=C_1\left\{\frac{d^{\frac{a}{2}}}{dU^{\frac{a}{2}}}\left[\frac{e^{Ux}}{(U+b)^{\frac{a}{2}+1}}\right]\right\}_b+C_2\left\{\frac{d^{\frac{a}{2}}}{dU^{\frac{a}{2}}}\left[\frac{e^{Ux}}{(U-b)^{\frac{a}{2}+1}}\right]\right\}_{-b} \qquad (59)$$

wobei wenn nun die Differentialquotienten mit Hülfe der Formel (32) entwickelt und dann jedesmal nach nach im ersten Theile des Ausdrucks U in b im zweiten U in $-b$ verwandelt:

$$y=C_1e^{bx}\left\{x^{\frac{a}{2}}\frac{a(a+2)}{2^3b}x^{\frac{a}{2}-1}+\frac{a(a+2)(a-2)(a+4)}{2^6\cdot 2\cdot b^2}x^{\frac{a}{2}-2}-\frac{a(a+2)(a-2)(a+4)(a-4)(a+6)}{2^9\cdot 2\cdot 3\cdot b^3}x^{\frac{a}{2}-3}+\cdots\right\}+ \qquad (60)$$

$$+C_2e^{-bx}\left\{x^{\frac{a}{2}}+\frac{a(a+2)}{2^3b}x^{\frac{a}{2}-1}+\frac{a(a+2)(a-2)(a+4)}{2^6\cdot 2\cdot b^2}x^{\frac{a}{2}-2}+\frac{a(a+2)(a-2)(a+4)(a-4)(a+6)}{2^9\cdot 2\cdot 3\cdot b^3}x^{\frac{a}{2}-3}+\cdots\right\}$$

Also in dieser Formel verschwinden beyden jedesmal ab, wenn $\frac{a}{2}$ eine ganze Zahl ist. Setzt man zum Beispiel $a=2$ so bekommt man als Integral der Gleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}\pm b^2xy=0$$

folgenden sehr einfachen Ausdruck.

$$y=C_1e^{bx}\left(x-\frac{1}{b}\right)+C_2\frac{b}{k}e^{-bx}\left(x+\frac{1}{b}\right)$$

von dem man sich aus der Beschaffenheit a posteriori überzeugen kann, daß er der Differentialgleichung Genüge leistet.

Diese Lösung ist indessen nur ganz allgemein in der Form (60) aufzufassen, und man kann sie nunmehr, bis zur Bestimmung der Faktoren G_1 und G_2, am einfachsten Teil dadurch der Differentialgleichung anpassen, daß man setzt:

b^r für allgemein

$$\cancel{H_r} = \cancel{H} \frac{a(a+2)(a-2)\cdots\cancel{(a+(r-1)2)(a-(r-1)2)}}{\cancel{2^{3r}\cdot 2.3.\ldots r\, b^r}}$$

$$H_r = \frac{a(a+2)(a-2)\cdots(a+2(r-1))(a-2(r-1))(a+2r)}{2^{3r}\cdot 2.3.\ldots r\, b^r} \tag{61}$$

r bestehe die Relation

$$H_r = H_{r-1}\,\frac{(a-2(r-1))\cancel{(a+2(r-1))}(a+2r)}{2^3\cdot r\cdot b} \tag{62}$$

Und es ist nun zu zeigen, daß

$$y = e^{bx}\,S\left[(-1)^r H_r\, x^{\frac{a}{2}-r}\right] \tag{63}$$

Genüge leiste. Nun resultiert ~~nun auf~~ für die Differentialien

$$\frac{dy}{dx} = e^{bx}\,S\left[(-1)^r x^{\frac{a}{2}-r}\left(bH_r - H_{r-1}\left(\frac{a}{2}-r+1\right)\right)\right] \tag{64}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{bx}\,S\left[(-1)^r x^{\frac{a}{2}-r}\left(b^2H_r - (a-2r+2)bH_{r-1} + \left(\frac{a}{2}-(r-1)\right)\left(\frac{a}{2}-(r-2)\right)H_{r-2}\right)\right] \tag{65}$$

Nun multiplizieren wir (63) mit $-b^2x$, (64) mit $-a$ (65) mit x und addieren die so erhaltenen Gleichungen, so wird unsere Relation (62), die wir zur Bestimmung von H_{r-1} und H_{r-2} ausgedrückt haben, zu Null werden, und wir haben somit gezeigt, daß der Ausdruck (63) mit G_2 multiplizierte Lösung der

Differentialgleichung ist, sofern G_1 und G_2 Konstanten sind.

Es bleibt nun noch übrig, die Integrale zu finden, welche den Fall behandeln, wo a eine ganze Zahl bedeutet. Man sieht, daß wenn a in $-a$ verwandelt wird, weder die Gleichung (59) noch (60) irgend eine Änderung erleidet, daß also das Integral der Differentialgleichung (56) in das Integral der Gleichung (55) übergeht, so daß also einige Faktoren mit Binomialkoeffizienten mit allgemeinen Exponenten oder in der andern mit bestimmten Integralen ausgedrückt werden können. Es finden sich hierbei in einem Falle diejenigen Bedingungen berücksichtigt, die wir früher unerörtert ließen, die Gültigkeit einer Formel ganz und gar betreffend. Es bedarf demnach der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ keiner Ausdrücke, und es bleibt nur die Bestimmung der Integrale übrig, wo nämlich in den Gleichungen (56) und (57) von den beiden Zeichen $\pm$ das eine zu nehmen ist, in welchem Falle ~~wegfällt~~ keine weitere Bedingung, und das demnach bezügliche Integral gestattet unmittelbar auf das Integral (58) zurückzugehen, wenn in demselben b^{r-1} anstatt b gesetzt wird. Setzt man diese und eine analog zugleich die imaginären Exponentialien der ihnen trigonometrischen Ausdrücke, so bekommt man anstatt y einen unter folgender Form erscheinenden Ausdruck:

$$y = (K_1\cos bx + K_2\sin bx)\left[x^{\frac{a}{2}} - \frac{a(a+2)(a-2)(a+4)}{2^6\cdot 2\cdot b^2}x^{\frac{a}{2}-2} + \frac{a(a+2)(a-2)\cancel{(a+6)}\cdots(a+8)}{2^{12}\cdot 2.3.4.6^4}x^{\frac{a}{2}-4} - \ldots\right] +$$
$$+ (K_2\cos bx - K_1\sin bx)\left[\frac{a(a+2)}{2^3 b}x^{\frac{a}{2}-1} - \frac{a(a+2)(a-2)(a+4)(a-4)(a+6)}{2^9\cdot 2.3.b^3}x^{\frac{a}{2}-3} + \frac{a(a+2)(a-2)\cdots(a+9)}{2^{15}\cdot 2.3.4.5.b^5}x^{\frac{a}{2}-5} - \ldots\right] \tag{66}$$

wo K_1 und K_2 die Konstanten der Integrationen bedeuten. Die ~~Die~~ für vorkommenden Reihen besitzen dieselbe Eigenschaft wie die in der Formel (60) aufgestellten, nämlich abzubrechen, wenn $\frac{a}{2}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist. Eine

$\frac{a}{2}$ oder gebrochen, so verwandelt sich dieselben in ganze Zahlen. von der Classe derjenigen, die man selbconvergirende nennt, und in sich die Reihen, deren Nebenbuhler sie sein sollten, beim Zusammennehmen von mehr und mehr Gliedern ursprünglich bis zu einer gewissen Grenze nähern, dann aber davon entfernen und nicht nur divergent sondern sogar fluctuirend werden, das heißt sie mit andern Worten: wenn man diese Reihen, wovon sie in der Formel (66) enthalten, nach, bei dem $r+1^{ten}$ Gliede abbricht, so erhält man einen Näherwerth, welcher (vorher y gesetzt) den ersten Theil der Differenzialgleichung (56) nicht mehr Null entgegen, sondern mehr einem von x abhängigen Werth, der bei dem fortwährenden Wachsen der Zahl r sich der Null bis zu einer gewissen, abermals von x abhängigen Grenze anfänglich nähert, dann aber bei dem fernern Wachsen dieser Zahl wieder entfernt. Setzt man diese Zahl, wovon bekanntlich der Grad, der man erhält, der $r+1^{te}$ Gliede durch das r^{te} Glied:

$$-\frac{(a-2(r-1))(a+2r)}{2^3 . r . b . x} \qquad (67)$$

welches für grössere x, und bei dem fortwährenden Wachsen

von r ungefähr ein Kleines mehr von Null hingegen kann sein kann, sich aber dann fortwährend der Einheit nähert und sie endlich überschreitet, wodurch die Reihe aus einer fallenden in eine steigende übergeht. Den aber über das Maß der Genauigkeit, mit welcher ein solches selbconvergirendes Reihenglied, bei dem $r+1^{ten}$ Gliede abgebrochen, das Integral der vorgelegten Differenzialgleichung (Rücksicht zu nehmen) durch jene Reihe darstellen wird, darüber das Resultat der Substitution in dieselbe, welches unmittelbar aus den Gleichungen (63), (64) und (65) folgt, da bezüglich mit $-b^2x$, $-a$ und x multiplizirt und dann addirt werden müssen. Dieß gibt als Resultat

$$e^{bx} S\left[(-1)^r x^{\frac{a}{2}-r+1}\left(2(r-1)b\,H_{r-1} - H_{r-2}\left(\frac{a}{2}-r+2\right)\left(\frac{a}{2}+r-1\right)\right)\right] \qquad (68)$$

welches null sein kann, wenn einzelne Glieder ~~einander~~ in Folge der Relation (62) oder

$$H_{r-1} = H_{r-2}\,\frac{\left(\frac{a}{2}-r+2\right)\left(\frac{a}{2}+r-1\right)}{2(r-1)\,b} \qquad (69)$$

sich mehr der Null entgegen ~~für einen endlichen~~ so lange diese Relation zwischen den mit H bezeichneten Coefficienten wie bisher stattfindet. Da nun indess willkürlich bei dem Gliede, dessen Coefficient H_r ist, die Reihe abbrechen

löst, so sind A_{r+1}, A_{r+2}, ... nicht mehr als Constante in die Lösung eingeführt, sondern Null; es werden daher alle Glieder der Summe (68) bis zu denjenigen mit $x^{\frac{a}{2}-r}$ inclusive, die Null gleich werden, und demzufolge aber von Null verschieden und gleich:

$$(70) \qquad (-1)^{r+1} e^{bx} x^{\frac{a}{2}-r-1} H_r \left(\tfrac{a}{2}-r\right)\left(\tfrac{a}{2}+r+1\right)$$

zurückfallen, die sämmtlichen demzufolgenden aber wieder verschwinden. Daher sieht man, daß die particuläre Lösung (63) ~~der vorletzte Theil~~ bis zum $r+1^{\text{ten}}$ Gliede abgebrochen, den letzten Theil der Differentialgleichung nicht Null wohl aber auf den Ausdruck (70) reducirt, der für sich einen und zwar den letzten der Glieder von (63) ist, das wohl mit einem Constanten Factor multiplicirt; daß es somit vollständig sei die Reihe abgebrochen bei ~~diesem Gliede~~ einem Gliede †, welches das $r$te ist, wenn man unter r diejenige ganze positive Zahl versteht, die dem Coefficienten (67) den ersten Rang anweist. Es kann noch hinzugefügt werden, daß, wenn in einer solchen Reihe

† für r einsetzt in (70) ein ganzes positives

die Zeichen wechseln, die vorher Null als balancirenden particulären Integrals zwischen die Summe aus r und aus $r+1$ Gliedern liegen muß. Bei dieser Balancirung folgt, daß solche halbconvergirende Reihen ungemein die ungünstigen Dienste, welche die Analysis in der Regel braucht zu machen gelegt, zur numerischen Berechnung des Werthes von y und den Gränzlosen der demzufolgenden Coefficienten wenigstens für gewissen Werth der Veränderlichen x nicht ganz nützlos seien. Man kann sich nicht, wenn man sie oft unentbehrlich finden sollte, immer mehr in Form von bestimmten Integralen darstellende verschaffen und diese gewiß mit mannigfach verschiedenen Daten, von denen sie nur einige Convergenz haben sollen; man muß leicht bemerkt werden, daß in sehr vielen Fällen diese bestimmten Integrale keine andere numerische Berechnung zulassen als die der halbconvergirenden Reihen. Immer könnte es im Praktischen drauf an, daß man die Form des Integrals eines Differentials mit allgemeinem Exponenten von x kennenlernt particulären Integrale entweder ~~kennt~~ oder wenigstens auf eine andere Form bringen könne, die der

Berechnung zugänglich ist. Diese kann nun nicht bloß gegeben auf die oben vorgetragene Weise, sondern auch dadurch, daß man die zu differenziirende Function in eine Reihe von Exponentialen oder sin analoge und Potenz in sich aufsteigenden bestimmten Integrale verwandelt und dann die Differenziirung ausführt. So kann man für z.B. die Darstellung des Integrals (59) folgenden Weg einschlagen: Für den bestimmten Integrale, welches (für $m>1$) einen convergenten endlichen Werth hat:

$$C = \int_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \lambda^{m-1} d\lambda \tag{71}$$

setzen wir $\lambda(U+b)$ anstatt λ und erhalten durch die Substitution, daß $U+b$ immer positiv ist, wenn wir im ersten Theile des Werthes von y, Integral (59), die uns die Differentiation $U=b$ gesetzt werden muß, wodurch sich ergiebt:

$$\frac{C}{(U+b)^m} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(U+b)} \cdot \lambda^{m-1} d\lambda \tag{72}$$

Es lässt sich in Folge dieser Gleichung dieser erste Theil des Werthes von y nun so darstellen:

$$C_1 \left\{ \frac{d^{\frac{a}{2}}}{dU^{\frac{a}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda b + U(x-\lambda)} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda \right\}_b = C_1 e^{bx} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda \tag{73}$$

Genau auf dieselbe Weise verfährt man bei dem zweiten Theil. Man kommt nämlich über Integral (71) durch die Substitution von $\lambda(U-b)$ anstatt λ um, damit Rücksicht nehmend, daß weil wegen der Differenziirung anstatt $U, -b$ gesetzt werden muß, $U-b$ als eine negative Größe zu betrachten sei. Dieß gibt:

$$\frac{C}{(U-b)^m} = \int_0^{-\infty} e^{-\lambda(U-b)} \lambda^{m-1} d\lambda \tag{74}$$

und der zweite Theil des Werthes von y lässt sich offenbar so schreiben:

$$C_2 \left\{ \frac{d^{\frac{a}{2}}}{dU^{\frac{a}{2}}} \int_0^{-\infty} e^{\lambda b + U(x-\lambda)} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda \right\}_{-b} = C_2 e^{-bx} \int_0^{-\infty} e^{2\lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda \tag{75}$$

und nun hat:

$$y = C_1 e^{bx} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda + C_2 e^{-bx} \int_0^{-\infty} e^{2\lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda \tag{76}$$

Dieß Integral gestattet keine Verwandlung von a in $-a$, sie gibt also nun das Integral der Gleichung (56) nicht wieder das der (55), welches bekanntlich in endlicher Form bereits gefunden worden ist, und es ist nicht schwer zu

§ 4

zeigen, dass nun die Entwicklung von $(x-\lambda)^{\frac{a}{2}}$ nicht
bloss die Binomialcoeff und mithin Integration
der Gleichung (60) zurückgeben; es lässt sich aber auch
unabhängig a posteriori beweisen, dass die obige gewonnene
Function die Differentialgleichung erfülle. Zeigen wir
dies nämlich für den ersten Theil derselben, d. h.

(77) für: $$y = e^{bx}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}}\lambda^{\frac{a}{2}}\,d\lambda .$$

wo wir noch $2b$ statt b schreiben wollen.

$$\frac{dy}{dx} = e^{bx}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}\lambda^{\frac{a}{2}}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1}\left[b(x-\lambda)+\frac{a}{2}\right]d\lambda \tag{78}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{bx}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}\lambda^{\frac{a}{2}}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-2}\left[b^2(x-\lambda)^2+ab(x-\lambda)+\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}-1\right)\right]d\lambda \tag{79}$$

folgt. Nun multiplizieren wir die vorstehenden drei Gleichungen
mit $-b^2x$, die zweite mit $-a$, die dritte mit x, und
addiren sie, so erhält man zunächst:

$$abe^{bx}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1}\lambda^{\frac{a}{2}+1}\,d\lambda - \frac{a^2}{2}e^{bx}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1}\lambda^{\frac{a}{2}}\,d\lambda$$

$$+\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-1\right)xe^{bx}\int_0^\infty e^{-2\lambda b}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}-2}\lambda^{\frac{a}{2}}\,d\lambda \tag{80}$$

Sodann durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Integrale
für die Reihenentwicklung schliesslich Abhandlung, u. s. w.

eingereicht am 5. Juni 1847. C. Hermite

DSI

AUTOGRAPHE

de

Petzval

Josef

OBSERVATIONS

P. a. S. Originalmanuskript der in W. Haidinger's „Naturwissenschaftliche Abhandlungen" Bd I. veröffentlichten Abhandlung „Integration der Differentialgleichungen von linearer Form" (Erste Abtheilung) mitgetheilt am 26. 3. 1847 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien. Mit Fürsorge Haidingers „für die naturwissenschaftlichen Abhandlungen, u. s. w. Leipzig am 5. Juni 1847. Seite 177–225 8 H. p. 4° (Seite 225–256 fehlen hätten vor Fertigstellung sein.)

† **Petzval,** Joseph, Mathematiker und Physiker, geb. 6. Jan. 1807 in Szepesbéla im Zipser Komitat (Ungarn), gest. 17. Sept. 1891 in Wien, Sohn eines deutschen Volksschullehrers, studierte in Pest besonders Ingenieurwissenschaften und war von 1828 bis 1835 als Ingenieur im Dienste der Stadt Pest. 1832 habilitierte er sich an der dortigen Universität, wurde 1835 ordentlicher Professor der Mathematik daselbst und ging 1837 in derselben Eigenschaft nach Wien, wo er auch nach seiner Pensionierung (1877) blieb. Sein Werk: »Integration der linearen Differentialgleichungen« (Wien 1853—59, 2 Bde.) hat wenig Beachtung gefunden und ist jetzt überholt, seine sonstigen mathematischen und mechanischen Untersuchungen hat er meist nur in Vorlesungen vorgetragen und leider nicht veröffentlicht. Unvergängliche Verdienste hat sich P. um die Photographie erworben, denn auf Grund seiner theoretischen Berechnungen hat 1840 der Optiker Voigtländer in Wien das erste für Porträtaufnahmen brauchbare Objektiv hergestellt, das vermöge seiner Lichtstärke die Aufnahme eines Porträts in weniger Sekunden ermöglichte, als man vorher Minuten gebraucht hatte. Diesem Objektiv, nach dessen System im wesentlichen auch die heute noch gebräuchlichen Porträtobjektive konstruiert sind, ließ er in den 1850er Jahren ein ebenso vorzügliches Objektiv für Landschaftsaufnahmen folgen. Leider ist ein umfangreiches Werk über die dioptrischen Untersuchungen, die ihn zur Berechnung dieser Objektive geführt hatten, als Handschrift zugrunde gegangen. In der »Zeitschrift für Mathematik und Physik«, Bd. 50 u. 51 (Leipz. 1904/05), sind zwei im Nachlaß von P. gefundene Manuskripte veröffentlicht: »Theorie der Störungen der Stützlinien« (bei Gewölben und Hängebrücken) und »Theorie der Tonsysteme«. Vgl. Gegenbauer, Ein vergessener Österreicher (im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Leipz. 1903); Erményi, Dr. J. Petzvals Leben und Verdienste (2. Aufl., Halle 1903); »Zur Erinnerung an Joseph P.« (Wien 1905, vom Komitee zur Errichtung eines P.-Denkmals).